مدخل إلى
نظرية المحددات والمصفوفات

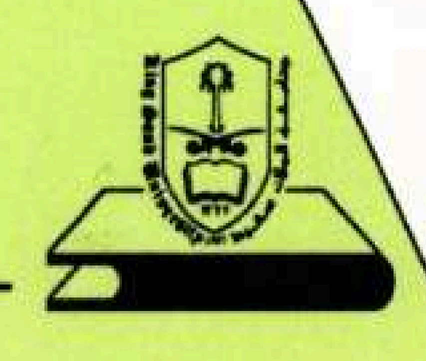
تأليف

إدوارد تانكارد براون

ترجمة

الدكتور أنيس إسماعيل كنجو

الدكتور سلمان بن عبد الرحمن السلمان



النشر و المطابع
جامعة الملك سعود


mohamed khatab



مدخل إلى
نظرية المحدّدات والمصفوفات

تأليف

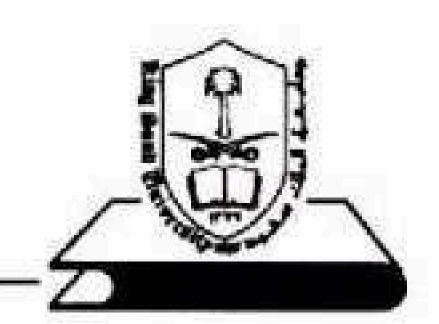
إدوارد تانكارد براون

ترجمة

الدكتور سلمان بن عبدالرحمن السلمان — الدكتور أنيس إسماعيل كنجو

أستاذ مشارك، قسم الرياضيات — أستاذ، قسم الإحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم ـ جامعة الملك سعود



النشر والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب. ٢٤٥٤ الرياض ١١٤٥١ - المملكة العربية السعودية

هذه ترجمة عربية مسموح بها لكتاب :

Translated from INTRODUCTION TO THE THEORY OF DETERMINANTS AND

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
براون، أدوارد تانكارد
مدخل إلى نظرية المحددات والمصفوفات/ ترجمة أنيس إسماعيل كنجو،
سلمان بن عبدالرحمن السلمان . ـ الرياض .
٣٧٢ ص؛ ١٧ × ٢٤سم
ردمك ٤ ـ ٤٦٢ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (جلد)
٢ ـ ٤٦٣ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (غلاف)
١ ـ المصفوفات ـ أ ـ كنجو، أنيس إسماعيل (مترجم) ب ـ السلمان،
سلمان بن عبدالرحمن (مترجم) ج ـ العنوان
ديوي ٥١٢,٩٤٣ ١٧/١٦٣٣

رقم الإيداع : ١٧/١٦٣٣

حكّمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس على نشره ـ بعد اطلاعه على تقارير المحكمين ـ في اجتماعه الثالث عشر للعام الدراسي ١٤٠٧/١٤٠٨هـ، الذي عُقد بتاريخ ١٤٠٨/٤/٢٨هـ الموافق ١٩٨٧/١٢/١٩م.

مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٧هـ

مقدمة

المترجمين

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على نبيِّنا محمد. وبعد، فيحتاج استكمال نواة أولية لمكتبة علمية عربية إلى جهود إضافية مضنية وإلى أن يسود بين العلميين العرب شعور عميق بالمسؤولية وبالتقصير على حدٍّ سواء. فالزمن يمضي بسرعة ومكتبات العلوم في اللغات الحيَّة تزخر كل يوم بزخم من الجديد، أما نحن الاختصاصيين العرب فنتوزع بين اتِّكالي أناخ في بقيعة الاستسلام واليأس لا يرى لنا مستقبلاً إلا من خلال الإنجليزية أو الفرنسية. وبين متحمِّسٍ لرفد اللسان العربي، لغة الكتاب المنير، بكل ما يستطيع من حقائق العلوم المعاصرة، وداعٍ إلى شدِّ الهمم وتضافر الجهود، وبين لا مبالٍ أراح نفسه حتى من عناء التفكير في المشكلة.

وكجزء من اهتمام واسع بتحقيق ذلك الحلم الكبير، حلم إرساء القواعد الأساسية لمكتبة علمية عربية، وحرص شديد على المساهمة المتواضعة في الجهود المبذولة على المستوى العربي للخروج بالطالب العربي من دائرة الحرمان والبؤس التي يعيشها وهو يبحث ـ دون جدوى ـ عن كتاب بلغته الأم يشفي غليله إلى التزود بالعلم ويخفف من وطأة المعركة القاسية التي يخوضها لنيل المعرفة، فقد ترجمنا هذا الكتاب، المُسمى «المدخل إلى نظرية المحدِّدات والمصفوفات» إلى العربية. وكان اختيارنا للموضوع بسبب حيويته وأهميته البالغة، ليس لطلبة الرياضيات فحسب، بل لطلَّاب علوم أخرى مثل الإحصاء، والفيزياء والهندسة والتربية والاقتصاد وغيرها. وكان اختيارنا لهذا الكتاب بسبب من تميزه بالجمع بين النظرية والتطبيق، وعرضه الجيِّد والموفَّق

للموضوع، حيث يتوخى البساطة والوضوح دون أن يُغفل الدقة الرياضية، ويتجنب التجـريد المفرط لنظرية الفضاءات الخطّية مكتفيًا منها بما تمس إليه الحاجة في سياق تقديم الموضوع. وهو يُعْطي أساسيات نظرية المصفوفات والمحدّدات مما يحتاجه على وجـه الخصـوص، طلّاب من خارج اختصـاص الرياضيات. ويَصْلُح كتابًا جامعيًّا لمقررين من مستوى السنة الأخيرة من الدراسة الجامعية أو السنة الأولى من الدراسات العليا. وإذا كنّا قد وفِّقنا إلى تقديم شيء مفيد للقاريء العربي فإننا نسأل الله العلي القدير أن يتقبله منا عملاً صالحًا فهو من وراء القصد وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المترجمـان

مقدمة

المؤلف

من المعروف جيدًا لأي مهتم بموضوع المصفوفات، الموجة العارمة من الاهتمام بدراسة هذا الموضوع في العقدين الماضيين.(*) ولقد وُجد أن معرفة الخواص الأساسية للمصفوفات مفيدة للغاية، ليس للمختصِّين في الرياضيات فحسب، ولكن أيضًا لطلبة الفيزياء والكيمياء والإحصاء والاقتصاد وعلم النفس والتربية. وفي الحقيقة، فاق عدد أولئك الطلبة من تخصصات أخرى عدد الرياضيين في كثير من مقررات المصفوفات. ولسوء الحظ، فإن معظم الكتب الدراسية المتوافرة كانت بلغة أجنبية أو مالت إلى التجريد المفرط. وهي، في الحقيقة، على درجة من التجريد، يجد معها حتى المتخصص في الرياضيات صعوبة في قراءة مستوعبة.

وغاية المؤلف هو تطوير معالجة نظرية تحتوى في كتاب دراسي واحد الحقائق الأساسية في نظرية المصفوفات مصحوبة بالبراهين الأكثر بساطة والتوضيحات الأكثر رشاقة ويسرًا التي يمكن للمؤلِّف العثور عليها.

وفيما يتعلق بنص الحقائق، لا يدعي المؤلف أي جديد. أما فيما يتعلق بترتيب الموضوعات أو ببراهين النظريات فمن المحتمل أن شيئًا جديدًا قد يتوافر.

والكتاب مُعَدّ لطلاب السنة الأخيرة من الدراسة الجامعية أو السنة الأولى من الدراسات العليا. وإذا كان الطالب قد درس مقررًا في نظرية المعادلات فالحال على ما يرام. وعلى الوجه الآخر، قد يكون مقرر في نظرية المصفوفات قيمًا بالنسبة لطالب في نظرية المعادلات، أو في الهندسة التحليلية المجسَّمة، أو في الهندسة التحليلية الإسقاطية.

(*) تعود كتابة هذه المقدمة إلى عام ١٩٥٨م.

وقـد اختـيرت التـمارين ودقّقت بعنـاية فائقة، ولبعضها مضمون غير بادٍ على السطح . وعلى سبيل المثال، فالتمرين ٢ على الصفحـة ١١ هو ببساطة تمرين في ضرب المصفوفات، ولكن المصفوفات الأربع تشكل زمرة بالنسبة لطالب درس مقررًا في الزمر. أما لطالب الهندسة فكل من المصفوفات الثلاث A ، B ، C هي مصفوفة هومولوجيا توافقية تحمل عناصرها الثابتة علاقة جدّ خاصّة بالعناصر الثابتة في المصفوفتين الأخريتين.

ومن الخبرة الفعلية في قاعة التدريس يجد المؤلف أن هناك مادة كافية لفصلين دراسيين. ولأولئـك الـذين لا يستـطيعون، لسبب أو لآخر، أخذ المقررين كليهما، يُوصى بما يلي: الفصول الأول إلى الحادي عشر، بالإضافة إلى الفقرات **٥١، ٥٢، ٥٣، ٦٠، ٦١**، بما في ذلك **نظرية كايلي ـ هاميلتون**.

ويرغب المؤلف الاعتراف بأنه مدين لبوشر (Bocher) ، وويدربرن (Wedder-burn) ، وماكْدُّفي (MacDuffee) ، الذين استأنس تكرارًا بأعمالهم، ويستحق الشكر أيضًا تلميذه سابقًا وزميله حاليًا، السيد تشارلس وورد بارنس (Charles Ward Barnes) ، الذي قدَّم مساعدة لا تقدَّر في تحضير المخطوطة للطباعة.

المحتويات

صفحة

الفصل الثالث: التحويلات الأولية لمصفوفة

الفصل الرابع: مزيد من جبر المصفوفات

الفصل الخامس: نظرية الارتباط الخطّي

الفصل السادس: نُظم المعادلات الخطّية

الفصل السابع : المعادلة المميّزة لمصفوفة

الفصل الثامن : أنواع خاصة من المصفوفات

الفصل التاسع : الصيغ ثنائيّة الخطّية

الفصل العاشر: الصيغ التربيعيّة

صفحة

الفصل الحادي عشر: الصيغ التربيعيّة الحقيقيّة

الفصل الثاني عشر: مصفوفات لامبدا (LAMBDA)

صفحة

الفصل الثالث عشر: تكافؤ أزواج من المصفوفات

الفصل الرابع عشر: الدّالة المميّزة المختزلة لمصفوفة

الفصل الخامس عشر: الصيغ القانونيّة لمصفوفة

الفصل السادس عشر: كثيرات الحدود السُلَّمية في مصفوفة

صفحة

الفصل السابع عشر: اختزال مصفوفة إلى صيغة قانونيّة

الفصل الثامن عشر: تكافؤ أزواج الصيغ



الفصل الأول

مفاهيم أساسية

١ - الحلقات والحقول

لنعتبر مجموعة $\mathscr{R}$ من العناصر ... ,a, b, c وقاعدتي تركيب سندعوهما «**الجمع**» (وتُكتب $a + b$)، و«**الضرب**» (وتُكتب $a \times b$ ، $a . b$ ، ab) بحيث إنه إذا كان a و b أي عنصرين من $\mathscr{R}$ ، فعندئذ يكون $a + b$ و ab عنصرين من $\mathscr{R}$ معرفين بصورة وحيدة. لنفرض، بالإضافة إلى ذلك، أن عمليتي الجمع والضرب تخضعان للقوانين الخمسة التالية:

$$a + b = b + a, \quad \text{(قانون الإبدال في الجمع)} \tag{1.1}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \text{(قانون الدمج في الجمع)} \tag{1.2}$$

$$\text{للمعادلة } a + x = b \text{ حل دائم في } \mathscr{R}. \tag{1.3}$$

$$a(bc) = (ab)c \quad \text{(قانون الدمج في الضرب)} \tag{1.4}$$

$$a(b + c) = ab + ac; (b + c)a = ba + ca \quad \text{(قانون التوزيع)} \tag{1.5}$$

فمجموعة العناصر التي تحقِّق الشروط المذكورة أعلاه تسمَّى **حلقة**.

وكل ما يعرضه الشرط (1.3) هو أن الطرح ممكن دومًا في حلقة. ولم نتخذ وحدانية الطرح كفرضية، لأنه يمكن البرهان عليها باستخدام الشروط (1.1) ، . . . ، (1.5).

ونكتب، عندئذ، الحل الوحيد للمعادلة (1.3) على الشكل $x = b - a$.

بالإضافة إلى الشروط الخمسة المذكورة أعلاه، إذا تحققت العلاقة :

$$ab = ba \tag{1.6}$$

من أجل أي عنصرين اختياريين a ، b من المجموعة، فنقول عندئذ: إن $\mathscr{R}$ هي **حلقة إبدالية (تبديلية)**.

ويمكن البرهان على أن كل حلقة $\mathscr{R}$ تحوي عنصرًا وحيدًا 0 ، يدعى «**العنصر الصفري**» لهذه الحلقة، الذي يتصف بالخاصتين التاليتين من أجل أي عنصر a من $\mathscr{R}$:

$$a + 0 = 0 + a = a, \tag{1.7}$$

$$a \times 0 = 0 \times a = 0. \tag{1.8}$$

وإذا احتوت الحلقة $\mathscr{R}$ عنصرًا e بحيث إن $ae = e$ من أجل أي عنصر a من $\mathscr{R}$ ، فعندئذ نقول: إن e هو العنصر «**محايد أيمن**». في هذه الحلقة وبصورة مشابهة، يسمى العنصر f ، الذي يحقق العلاقة $fa = a$ من أجل أي a من $\mathscr{R}$. العنصر «**محايد أيسر**»، وقد لا تحوي الحلقة أي عنصر محايد على الإطلاق. وعلى الوجه الآخر، قد تحوي عناصر محايدة يُمنى ولا تحوي عناصر محايدة يسرى، والعكس بالعكس، (انظر التمرين ١٠، فقرة ٥). وعلى أي حال، إذا كان للحلقة $\mathscr{R}$. عنصر محايد أيمن e وعنصر محايد أيسر f ، فيجب أن يتساوى العنصران. ذلك لأن $fe = f$ من الشرط الأول، بينما $fe = e$ بالاستناد إلى الشرط الثاني، وبالتالي $e = f$.

أمثلة على حلقات

مجموعة جميع الأعداد الصحيحة؛ الموجبة، السالبة والصفر؛
مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية؛
مجموعة جميع الأعداد $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان صحيحان؛
مجموعة جميع الأعداد النسبية (القياسية).

مجموعة جميع كثيرات الحدود بمتغير واحد ومعامِلات حقيقية ؛

مجموعة جميع الدوال المستمرة في متغير حقيقي x على الفترة $0 \leqslant x \leqslant 1$.

مجموعة جميع «الرباعيات» $a + bi + cj + dk$ حيث a ، b ، c ، d أعداد صحيحة ووحـدات «الرباعية» i, j, k تحقِّق العلاقات $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ، $ij = -ji = k$ ، $jk = -kj = i$ و $ki = -ik = j$.

وهذا المثال الأخير هو مثال على حلقة غير تبديلية .

ومفهوم **الحلقة** مفهوم مهم جدًّا في الجبر الحديث المجرّد، وقد ظهر حديثًا عدد كبير من الكتب في هذا الموضوع . وعلى أي حال، ولأننا لا نهدف، في هذا الكتاب، إلى القيام بدراسة خاصة للحلقات، فإننا سوف لا نتابع المناقشة، عند هذه النقطة، لأكثر من ذلك .

لنعتبر الآن حلقة $\mathscr{R}$ تحقِّق، بالإضافة إلى الشروط (1.1) . . . ، (1.6) ، ما يلي :

(1.9) للمعادلة $ax = b$ حلّ في $\mathscr{R}$ إذا كان $a \neq 0$.

فيُقال عندئذ إن الحلقة $\mathscr{R}$ هي حقل $\mathscr{F}$.

أمثلة على حقول

مجموعة كل الأعداد النسبية ، (حقل الأعداد النسبية) ؛

مجموعة كل الأعداد الحقيقية ، (الحقل الحقيقي) ؛

مجموعة كل الأعداد المركبة ، (الحقل المركب) ؛

مجموعة كل الأعداد من الشكل $a + b\sqrt{2}$ حيث a و b عددان نسبيان .

مجموعة كل الدوالّ النسبية $f(x) / g(x)$ بمتغير واحد ومعاملات حقيقية ؛

مجموعة كل المصفوفات 2×2 من الشكل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ حيث a و b عددان صحيحان .

وكل ما يعرضه الشرط (1.9) هو أن عملية القسمة ممكنة دومًا في حقل $\mathscr{F}$ باستثناء القسمة على الصفر . ونرمز لخارج القسمة ، الذي يمكن البرهان على أنه وحيد، بالرمز b/a.

ويوجد دائمًا عنصر محايد وحيد في حقل $\mathscr{F}$ ، ونرمز له عادة بـ 1 ، بحيث نكتب من أجل أي عنصر a من الحقل :

$$a \times 1 = a \qquad (1.10)$$

وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان $ab = 0$ في حقل، و $a \neq 0$ ، فعندئذ $b = 0$ ؛ أي أنه يمكننا دائمًا القسمة على عنصر يختلف عن الصفر.

٢ ـ المصفوفة

تعريف

إذا كانت $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ عناصر من حلقة $\mathscr{R}$ ، فإن العناصر الـ mn

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

مرتبة في جدول مستطيل يحوي m صفًّا و n عمودًا تدعى **مصفوفة** $(m \times n)$ **فوق الحلقة** $\mathscr{R}$.

وبصورة عامة نرمز للمصفوفة (2.1) بالحرف الكبير A بمفرده. وكثيرًا ما يكون من المريح أن نرمز للمصفوفة A بالرمز المختصر (a_{ij}) أو $\|a_{ij}\|$ ، حيث يرمز a_{ij} إلى العنصر الواقع في الصف i والعمود j من A. ويجب ملاحظة أن المصفوفة ليست أبدًا كمية بمفردها. ولكنها مجموعة كميات، أو عناصر؛ وإذا تغير عنصر واحد فإن المصفوفة تتغير.

وأحد أبسط الأمثلة عن مصفوفة هي المصفوفة $(2, -5)$ ذات الصف الواحد والعمودين، وهي تمثل الإحداثيات الديكارتية (الكارتيزية) لنقطة P في مستوٍ؛ والمتجه ذو الـ n بُعدًا $(a_1, \ldots, a_n)$ هو مصفوفة بصف واحد أو عمود واحد.

ويُسمى العددان m و n بُعدي المصفوفة، ونشير إلى A على أنها m في n أو $m \times n$ مصفوفة (ونرمز لها أحيانًا بالشكل $\underset{m \times n}{A}$). وإذا كان $m = n$ فالمصفوفة مربعة. وعلى أي حال تدعى العناصر a_{11} ، a_{22} ، . . . **العناصر القطرية**، أو **عناصر القطر الرئيس**. ونشير إلى مصفوفة فيها n صفًّا و n عمودًا على أنها مصفوفة مربعة $n \times n$ ، أو مصفوفة مربعة من المرتبة n.

ومن أجل معظم التطبيقات ستنتمي عناصر المصفوفة إلى حقل الأعداد الحقيقية أو إلى حقل الأعداد المركبة. وعلى أي حال، وباستثناء حالات تتضمن عملية القسمة،

لا يكـون من الضروري الافتراض بأن العناصر تنتمي إلى حقل. وعندما نستخدم مصـطلح «الحلقة الإبدالية» فسيجد الطالب أنه من المفيد أن يتصور حلقة الأعداد الصحيحـة كمثال، وربما يكون من الأفضل أن يتصور مجموعة كل كثيرات الحدود بمتغير حقيقي x ومعاملات حقيقية.

٣ ـ بعض العمليات مطبّقة على المصفوفات

تعريـف

نقول إن المصفوفتين $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$، اللتين تنتمي عناصرهما إلى حلقة $\mathscr{R}$، متساويتان إذا، وفقط إذا، كان لهما الأبعاد نفسها (m صفًا و n عمودًا)، وكان كل عنصر من A مساويًا للعنصر الموافق من B ($a_{ij} = b_{ij}$ ؛ $i = 1, ..., m$ ؛ $j = 1, ..., n$).

وبصورة خاصة، نقول إن A هي الصفر إذا، وفقط إذا، كان كل عنصر من A مساويًا للصفر. ونكتب في هذه الحالة $A = 0$.

تعريف

نعـني بمـجـمـوع (أو فرق بين) المصفـوفتـين $\underset{m\times n}{A}$ و $\underset{m\times n}{B}$، المصفـوفـة $\underset{m\times n}{C} = A \pm B$ التي يساوي كل من عناصرها c_{ij} مجموع (أو فرق) العنصرين المتوافقين من A و B.

لاحظ أن المجمـوع والفـرق غير معرّفين ما لم يكن لـ A و B الأبعاد نفسها. ولاحظ أيضًا أنه إذا كان $A = B$ فإن $A - B = 0$، حيث يرمز 0 لمصفوفة الصفر.

ولتمييزها عن المصفوفات، نشير غالبًا إلى عناصر حلقة $\mathscr{R}$ ؛ أو كثيرات حدود في متغير واحد أو أكثر، وبمعاملات في $\mathscr{R}$ ؛ على أنها أعداد سُلّمية، ونرمز للأعداد السُلّمية بأحرف لاتينية صغيرة a ، b ، c ، k ، l ، . . . . ، إلخ، أو بأحرف يونانية صغـيرة α ، β ، γ ، . . . ، إلـخ. وسنستخـدم الأحـرف الـلاتينية الكبيرة كرموز للمصفوفات والمتجهات.

تعريف

إذا كانت A مصفوفة فوق حلقة إبدالية $\mathscr{R}$. و k عدد سُلَّمي . فنعني بِـ kA أو Ak المصفوفة التي نحصل عليها من A بضرب كل عنصر بِـ k.

إذا كانت A, B, C, X عبارة عن مصفوفات $(m \times n)$ فوق $\mathscr{R}$ ، وكان k و l عددين سُلَّميين، فمن السهل إثبات الخواص التالية :

$$A + B = B + A, A + (B + C) = (A + B) + C; \tag{3.1}$$

$A + X = B$ *قابلة للحل دائمًا* (3.2)

$$k(A + B) = (A + B)k = kA + kB = Ak + Bk; \tag{3.3}$$

$$(k + l)A = kA + lA = Ak + Al = A(k + l); \tag{3.4}$$

$$(kl)A = k(lA) = l(kA) = A(kl) = (Ak)l. \tag{3.5}$$

٤ - ضرب المصفوفات

تعريف

لتكن المصفوفة $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$ والمصفوفة $\underset{n\times q}{B} = (b_{ij})$ معرَّفتين فوق حلقة . فعندئذ نعني بالجداء AB ، مكتوبًا بهذا الترتيب، المصفوفة $\underset{m\times q}{C} = (c_{ij})$ بحيث إن :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj}, \tag{4.1}$$
$$(\mathrm{i} = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, q)$$

وما يهمنا عادةً هو الحلقات الإبدالية التي يمكننا فيها تغيير ترتيب المقادير a ,b في (4.1). وعلى أي حال، ففي حالة كون الحلقة $\mathscr{R}$ غير إبدالية، يجب كتابة المقادير a عن يسار المقادير b في الجداء AB.

وهذا يعني أنه إذا كانت A مصفوفة $m \times n$ و B مصفوفة $k \times q$ ، فلكي يوجد الجداء AB يجب أن يكون $k = n$. ونعبِّر عن ذلك بقولنا : إنه يجب أن يتساوى البعدان المتجاوران لِـ A و B. ويُعبِّر الكُتَّاب الإنجليز عن ذلك بقولهم : إن A و B يمتثلان لعملية الضرب . وإذا تحقق هذا الشرط، فعندئذ تكون AB مصفوفة أبعادها $(m \times q)$ والعنصر منها الواقع في الصف i والعمود j هو مجموع جداءات عناصر الصف i من A بالعناصر الموافقة في العمود j من B. وإذا كانت أبعاد A هي $m \times n$ وأبعاد B هي $k \times q$ ، فلا يكون الجداء BA معرّفًا ما لم يكن $q = m$.

مثـال

ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ، } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

فعندئذ

$$AB = \begin{bmatrix} 1(2) + 2(0) & 1(-1) + 2(0) \\ 3(2) + 4(0) & 3(-1) + 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

وعلى الوجه الآخر نجد أن :

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq AB.$$

ويمكننا مباشرة برهان النظرية التالية :

نظرية (٤ ـ ١)

إذا كانت A مصفـوفـة $m \times n$ ، B و C مصفـوفتـين $n \times q$ ، فعنـدئـذ $A(B + C) = AB + AC$ ؛ أي أن جداء المصفوفات توزيعي بالنسبة للجمع .

قبل كل شيء نلاحظ أن المصفوفة $B + C$ هي مصفوفة $n \times q$ بحيث إن أبعاد العضو الأيسر من الجداء هي $m \times q$. وبالإضافة إلى ذلك فإن كل حدٍّ من الطرف الأيمن هو مصفوفة $m \times q$ ، أي أن للطرفين الأبعاد نفسها . ويبقى علينا فقط أن نبيِّن أن العنصر في الموضع (i, j) هو نفسه في الطرفين ؛ والعنصران في الطرفين اللذين يمثلان الموقع (i, j) هما على الترتيب .

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}(b_{tj} + c_{tj}) \quad \text{و} \quad \sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{tj} + \sum_{t=1}^{n} a_{it}c_{tj}. \tag{4.2}$$

وبما أن عناصر المصفوفات الثلاث تنتمي إلى حلقة ، فإنها تحقِّق الشرط (1.5) وبالتالي فإن العبارتين في (4.2) متساويتان .

نظرية (٤ ـ ٢)

إذا كانت A ، B ، و C ثلاث مصفوفات أبعادها على الترتيب $m \times n$ ، $n \times p$ و $p \times q$ ، فعندئذ $A(BC) = (AB)C$ ؛ أي أن جداء المصفوفات دامج .

نلاحظ أولاً أنّ كلاً من الجداءات في النظرية هو مصفوفة $m \times q$. وعناصر الصف i من A هي

$$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} \qquad (i = 1, \cdots, m),$$

في حين أنّ عناصر العمود j من BC هي :

$$\sum b_{1t}c_{tj}, \sum b_{2t}c_{tj}, \cdots, \sum b_{nt}c_{tj}$$

حيث ينتشر دليل الجمع t في جميع الحالات من 1 إلى p . وبما أن عنصر الموضع (i, j) من الجداء $A\,(BC)$ هو

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} \sum_{t=1}^{p} b_{st}c_{tj}.$$

وبما أننا نتعامل هنا مع مجاميع منتهية، فيمكن تغيير ترتيب المجاميع لنجد :

$$\sum_{t=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{st} \right) c_{tj}.$$

ولكن هذا هو بدقة العنصر من المصفوفة $(AB)\,C$ الذي يحتل الموقع (i, j). وهذا يبرهن النظرية. وبالإضافة إلى ذلك يمكن البرهان بعملية استقراء بسيطة على أن النظرية صحيحة من أجل جداء أي عدد من المصفوفات.

وبما أن فرق وجداء مصفوفات مربعة $n \times n$ هو مصفوفات مربعة $n \times n$ ، فلدينا بالنظر إلى (3.1) ، (3.2) والنظريتين (٤ ـ ١) و(٤ ـ ٢) النظرية التالية :

نظرية (٤ ـ ٣)

مجموعة كل المصفوفات المربّعة $n \times n$ بعناصر من حلقة إبدالية $\mathscr{R}$ ، تشكل حلقة (غير إبدالية) .

لنرمز بـ I_n للمصفوفة المربّعة $n \times n$ التي تحوي 1 في القطر الرئيسي وأصفارًا فيما عدا ذلك؛ مثلاً :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

عندئذ إذا كانت A أي مصفوفة $m \times n$ ، فمن السهل أن نتحقق من أن :

$$I_m A = A I_n = A \tag{4.3}$$

وفضلاً عن ذلك فإن I_m و I_n هما المصفوفتان الوحيدتان اللتان تتحقق (4.3) معهما من أجل كل A . ذلك لأنه إذا كانت A مصفوفة أبعادها $m \times n$ وفرضنا

أن $XA = A$ من أجـل كل مصـفـوفـة $\underset{m \times n}{A}$. فنـلاحظ أولاً أن X يجب أن تكـون مصفـوفـة مربعـة $m \times m$ ، ذلـك لأنه فيما عدا ذلك لا يكون لِـ XA أبعاد A نفسهـا. لنـأخـذ بعـد ذلـك $A = I_m$ ، فعنـدئـذ وبـاعتبـار أن $XI_m = X$ ، وأن $XI_m = I_m$ بالفرض، نستنتج أن $X = I_m$.

لاحظ أنه إذا كان

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

فعندئذ نجد من أجل هذه المصفوفة A بصورة خاصة أن $XA = A$ ، ولكن العلاقة لا تصح لكل A .

إذا كانت A مصفـوفـة مربعة، فمن أجل الجداء AA نكتب A^2 ، ومن أجل $(AA)\,A = A\,(AA)$ ، نكتب A^3 . وإذا كان m أي عدد صحيح موجب، فمن السهل الـبرهـان بالاستنـاد إلى النـظرية (٤ ـ ٢) أن الجـداء $A\,A \ldots A$ ، الذي يحوي m من العوامل، معرّف تمامًا. وسنكتب هذا الجداء على الشكل A^m .

٥ ـ الجداءات مع التجزئة

لتكن A مصفـوفـة $m \times n$ وB مصفوفة $n \times q$ ، بعناصر من حلقة إبدالية $\mathscr{R}$.

لتكن m_1 ، m_2 ؛ n_1 ، n_2 ؛ وq_1 ، q_2 أعــدادًا صحـيحــة موجـبــة بحـيث إن: $m_1 + m_2 = m$ ، $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ، $q_1 + q_2 = q$ ، ولنجـزيء A و B كما هو مبين أدنـاه:

$$A = \begin{array}{c} m_1 \\ \hline m_2 \end{array} \left[\begin{array}{c:c:c} \overset{n_1}{a_{11}} & \overset{n_2}{} & \overset{n_3}{a_{1n}} \\ \hdashline & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c:c} \overset{q_1}{b_{11}} & \overset{q_2}{b_{1q}} \\ \hdashline & \\ \hdashline b_{n1} & b_{nq} \end{array}\right] \begin{array}{c} n_1 \\ \hline n_2 \\ \hline n_3 \end{array}$$

لاحظ أن صفوف B مجزأة تمامًا بالطريقة نفسها التي نجزيء فيها أعمدة A . ويمكن عنـدئـذ النـظر إلى كل من المصفوفتين A و B وكأنها مصفوفة عناصرها هي بدورها مصفوفات، وهكذا يكون

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

حيث أبعاد A_{11} ، A_{12} ، . . . إلخ ، هي $m_1 \times n_1$ ، $m_1 \times n_2$ ، إلـخ . ونبـيِّنُ الآن أنه يمكن الحصول على الجداء $C = AB$. ولذلك نكتب :

$$C = AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

حيث C_{ij} هي *المصفوفة* $m_i \times q_i$.

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + A_{i3}B_{3j}. \tag{5.3}$$

لاحظ أنه في العبارة الواقعة في *الطرف الأيمن* من (5.3) ، لا تكون المصفوفات A_{ij} ، بصورة عامة ، قابلة للمبادلة مع B_{ij} ، بحيث يجب كتابة الـ A_{ij} على اليسار عند تشكيل الجداء AB.

والآن نجد في (5.3) أن أبعاد المصفوفة A_{i1} هي $m_i \times n_1$ بينما أبعاد المصفوفة B_{1j} هي $n_1 \times q_j$. ومنه نجد أن أبعاد $A_{i1}B_{1j}$ هي $m_i \times q_j$. وبصـورة مشـابهة نستنتج أن كل حدٍّ من الطرف الأيمن من (5.3) أبعاده $m_i \times q_j$ وبالتالي فإن مجموعها معرَّف وأبعاده هي أيضًا $m_i \times q_j$.

لنشكل بعد ذلك العنصر الواقع في الصف k والعمود l من C.

$$c_{kl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{il} = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki}b_{il} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} a_{ki}b_{il} + \sum_{i=n_1+n_2+1}^{n} a_{ki}b_{il}. \tag{5.4}$$

والآن إذا كان $1 \leqslant k \leqslant m_1$ ، $1 \leqslant l \leqslant q_1$ ، والمجـاميع في الـطرف الأيمن هي العناصر في الصف k والعمود l من المصفوفات $A_{11}B_{11}$ ، $A_{12}B_{21}$ ، و $A_{13}B_{31}$ ، بحيث يكـون مجمـوعهـا هو العنصر (k, l) من المصفـوفة C_{11} كما عرفناها في (5.3). وإذا كان $k = m_1 + k'$ ، $l = q_1 + l'$ ، حيث $1 \leqslant k' \leqslant m_2$ ، $1 \leqslant l' \leqslant q_2$ ، فإن (5.4) هو العنصر الموافق للموقع (k', l') من C_{22}. وهذا يُبرهن قاعدة الضرب بالتجزئة .

والحالة ذات الأهمية الخاصة هنا هي التالية: لتكن A ، B ، C ، . . . مصفوفات مربعة $n \times n$ بعناصر من حلقة إبدالية $\mathscr{R}$. لتكن m_1 ، m_2 ، . . . m_s أعدادًا صحيحة موجبة بحيث إن $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$ ولنجزيء كل مصفوفة كما يلي:

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & & A_{1s} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & & A_{2s} \\ \hdashline & & & \\ \hdashline A_{s1} & A_{s2} & & A_{ss} \\ \hdashline m_1 & m_2 & & m_s \end{array}\right] \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \\ m_s \\ \\ \end{array} \tag{5.5}$$

أي أن كل مصفوفة مجزأة بالنسبة للصفوف تمامًا بالتجزئة نفسها الموافقة للأعمدة. وهكذا يمكن اعتبار A ، على سبيل المثال، كمصفوفة $S \times S$ عناصرها A_{ij} هي مصفوفات $m_i \times m_j$. وبما أن كلًّا من المصفوفات الباقية B ، C ، . . . إلخ. مجزأة بالطريقة نفسها تمامًا، فلا يمكننا تشكيل الجداءات فحسب، وفقًا للطريقة المشار إليها سابقًا، وإنما يمكن أيضًا تشكيل المجاميع والفروق؛ وهكذا نكتب:

$$A \pm B = (A_{ij} \pm B_{ij}).$$

تمارين

١) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

فأوجد A^2 ، B^2 ، C^2 ، AB ، BA ، AC ، CA ، BC ، CB.

٢) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فبيِّن أن $A^2 = B^2 = C^2 = I$ ، $AB = BA = C$ ، $CB = BC = A$ و $AC = CA = B$.

٣) السؤال (٢) نفسه لكل من الثلاثيات التالية من المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -12 & -12 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 3 \\ -10 & -8 & 5 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -9 & -12 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -8 \\ -3 & 6 & 8 \\ 3 & -7 & -9 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 9 \\ 2 & 5 & 3 \\ -8 & -16 & -11 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 6 & 9 & 7 \\ -12 & -20 & -15 \end{bmatrix}.$$

٤) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أن

$$A^2 = B^2 = [(1/2)(A + B)]^2 = I \text{ ؛ } (A - B)^2 = 0$$

٥) إذا كانت

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

وk أي عدد، فبيِّن أن

$$[kD + (1 - k) E]^2 = I$$

٦) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أن $A^2 - 11A + 10I = 0$.

٧) إذا كانت

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أن $U^2 = U$ ، و $V^2 = V$ (يقال: إن U و V متساويتا القوى)؛ بيِّن أيضًا أن $U + V = I$ ، $UV = VU = 0$

٨) إذا كانت

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

فبيِّن أن $X^2 = 0$. يقال: إن X معدومة القوى.

٩) إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أن $AX = AY$ ، مع أن $X \neq Y$.

١٠) بيِّن أنـه إذا كان a_1 ، a_2 عددين من حلقـة الأعـداد الصحيحـة فإن مجمـوعة المصفـوفـات 2×2 من الشكل $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ تكوِّن حلقة. وبيِّن أن تلك الحلقة تتضمن عناصر محايدة يُسرى، ولا تتضمن عناصر محايدة يُمنى.

١١) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & G \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أن $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$ بصرف النظر عن الأعداد a ، b ، c ، d.

١٢) إذا كان

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

و
$$A = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -I_2 & V \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ W & I_2 \end{bmatrix}$$

فبيِّن أن $A^2 = B^2 = C^2 = I_4$ ؛ $AB + BA = AC + CA = BC + CB = -2I_4$.

١٣) بيِّن أنه إذا كانت X مصفوفة مربعة $n \times n$ وتقبل المبادلة مع أية مصفوفة A مربعة $n \times n$ ، فلا بدَّ أن تكون X مصفوفة من النوع kI ، حيث إن k عدد سُلَّمي.

الفصل الثاني

الخواص الأساسيّة للمحدِّدات

٦ ـ محدَّد مصفوفة مربّعة

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

مصفوفة مربّعة $n \times n$ تنتمي عناصرها a_{ij} إلى حقل ما $\mathscr{F}$ ، مثلاً، حقل الأعداد النسبية. فتقترن بـ A دوال سُلّميّة معيَّنة، ونعني عناصر من الحقل $\mathscr{F}$ ، ذات أهمية كبيرة. وإحداها هو محدَّد المصفوفة (ويُكتب على الشكل $|A|$) الذي سنبدأ الآن في تعريفه.

لنعتبر عنصرين a_{kl}, a_{ij} من المصفوفة (6.1) لا يقعان في الصف نفسه أو في العمود نفسه من هذه المصفوفة، أي أن، $i \neq k$ و $j \neq l$. فإذا وقع واحد من هذين العنصرين إلى يمين وفوق العنصر الآخر دُعي الزوج «**زوجًا سلبيًّا**»؛ وفيما عدا ذلك يدعى الزوج «**زوجًا إيجابيًّا**». وعلى سبيل المثال، الزوج a_{22} ، a_{31} هو زوج سلبي بينما a_{23} و a_{11} زوج إيجابي. ونستطيع الآن عرض التعريف التالي:

تعريف

لتكن $A_{n \times n}$ مصفوفة مربعة (a_{ij}) بعناصر من حقل $\mathscr{F}$. لنكتب كل الجداءات الممكنة التي يحوي كل منها n عاملاً، والتي نحصل عليها باختيار عنصر واحد وواحد فقط من كل صف ومن كل عمود.

وسيكون لدينا $n!$ من مثل هذه الجداءات. وفي كل جداء نقوم بإحصاء العدد σ من الأزواج السلبية. وإذا كان σ زوجيًا، نُلحق بهذا الجداء إشارة موجبة؛ أما إذا كان σ فرديًا فنلحق إشارة سالبة. والمجموع الجبري لكل هذه الجداءات الـ $n!$ هي قيمة مفكوك (نشر) $|A|$، أي أن:

$$|A| = \sum^{n!} (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \qquad (6.2)$$

حيث تتغير i_1، i_2، . . . .، i_n فوق جميع التباديل الـ $n!$ الممكنة للأعداد 1، 2، . . . .، n، ويشير σ إلى عدد الأزواج السلبية في الجداء.

وعلى سبيل المثال، إذا كانت $n = 4$، فإن الجداء $a_{12}\, a_{24}\, a_{33}\, a_{41}$ هو، باستثناء ما يمكن أن يتعلق بالإشارة، حدّ من مفكوك $|A|$. وبما أن الزوجين (a_{12}, a_{24})، و (a_{12}, a_{33}) إيجابيان في حين أن (a_{12}, a_{41})، (a_{24}, a_{33})، (a_{24}, a_{41}) و (a_{33}, a_{41}) هي أزواج سلبية، فإن $\sigma = 4$، ويكون الجداء كما ذكرناه (أي بإلحاق إشارة +) هو حدّ من مفكوك $|A|$.

ويمكن تحديد الإشارة التي سنضعها أمام حدّ بطريقة أخرى. لنعتبر المتبادلة i_1، i_2، . . . .، i_n لمجموعة الأعداد 1، 2، . . . .، n، فيمكن اعتبار ترتيب معيَّن، ولنقل الترتيب 1، 2، . . . .، n كترتيب طبيعي. ويُقال عندئذ إن متبادلة ما تحوي عددًا من الارتدادات يساوي إلى عدد الظروف التي يتبع فيها عدد ما عددًا آخر كان في الترتيب الطبيعي سابقًا له. وهكذا إذا كان الترتيب الطبيعي 1، 2، 3، 4، فإن المتبادلة 4132 تقدِّم الارتدادات الأربعة 32 ,42 ,43 ,41.

لنعتبر الآن عنصرين a_{ij} و a_{kl} $(i \neq k$ ، $j \neq l)$ مختارين من صفين مختلفين ومن عمودين مختلفين من المصفوفة A في (6.1). لنفرض أولاً $i < k$، بحيث يقع a_{ij} في صف فوق الصف الذي يقع فيه a_{kl}. فعندئذ يكون الزوج (a_{ij}, a_{kl}) زوجًا موجبًا أو سالبًا وفقًا لوقوع a_{kl} في عمود إلى يمين أو إلى يسار العمود الذي يقع فيه a_{ij}، أي وفقًا لما إذا كان $j < l$ أو $j > l$، أو إذا كانت المتبادلة jl تمثل أو لا تمثل ارتدادًا عن الترتيب الطبيعي 1، 2، . . . .، n. وفي الحقيقة، من السهل رؤية أنه إذا لم نفترض $i < k$، فسيكون الزوج (a_{ij}, a_{kl}) زوجًا موجبًا أو زوجًا سالبًا وفقًا لما إذا كان مجموع الارتدادات المتمثلة

في ik وjl، زوجيًا أو فرديًا: ويمكن الآن الإفصاح عن التعريف البديل لمفكوك محدّد A على شكل نظرية:

نظرية (٦ - ١)

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ بعناصر في حقل $\mathcal{F}$. فعندئذ:

$$|A| = \sum^{n!} (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{6.3}$$

حيث تتغير i_1 ، i_2 ، . . . ، i_n فوق جميع التباديل الـ $n!$ الممكنة للأعداد 1 ، 2 ، . . . ، n ؛ مأخوذة جميعها في وقت واحد، وحيث σ هو عدد ارتدادات i_1 ، i_2 ، . . . ، i_n عن الترتيب الطبيعي 1 ، 2 ، . . . ، n .

٧ - النظريات الأساسيّة المتعلقة بالمحدّدات

تعريف

إذا كانت A مصفوفة $m \times n$ فالمصفوفة $n \times m$ التي نحصل عليها بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفًا، دون المساس بترتيبها النسبي، تدعى منقول (مدوّر) A. والرمز الشائع لمنقول A هو A'. وكمسألة رموز سنجد من المريح أن نرمز بـ a'_{ij} للعنصر من A' الواقع في الصف i والعمود j. وينتج عندئذ أن $a'_{ij} = a_{ji}$.

تعريف

إذا كانت A مصفوفة $m \times n$ عناصرها أعداد حقيقية أو مركبة، فتدعى المصفوفة $m \times n$ ، التي نحصل عليها من A بأن نضع بدلاً من كل عنصر a_{ij} مرافقه $\bar{a}_{ij}$ ، المصفوفة المرافقة لـ A (أو مرافق A). ونرمز عادةً لمرافق A بـ $\bar{A}$. ومنقول $\bar{A}$ ، وهو بوضوح مرافق A' بالضبط، يدعى مرافق منقول A. ولتجنب أي لبس مع المعكوس A^{-1} ، الذي سنعرفه فيما بعد، نرمز لمرافق منقول A بالرمز A^* بدلاً من $\bar{A}'$.

نظرية (٧ - ١)

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإنه $|A'| = |A|$ ، أي أن محدّد مصفوفة مربعة A يساوي محدّد منقولها.

لبرهان هذا نلاحظ أن كل جداء في المجموع (6.2) يحوي كعامل عنصرًا واحدًا، وواحدًا فقط من كل صف ومن كل عمود في $|A|$ ؛ ولذلك فهو يحوي عنصرًا واحدًا، وواحدًا فقط من كل عمود وكل صف من $|A'|$. ومنه، وباستثناء ما يمكن أن يتعلق بالإشارة، يكون كل حد من $|A|$ هو حد من $|A'|$ ، والعكس بالعكس. وفضلاً عن ذلك، ينبغي أن يكون واضحًا أن زوجًا (a'_{ij}, a'_{kl}) في $|A'|$ هو زوج موجب أو سالب وفقًا لما إذا كان (a_{ij}, a_{kl}) زوجًا موجبًا أو سالبًا في A. وبالتالي فإن عدد الأزواج السالبة في كل جداء هو من أجل $|A'|$ نفسه من أجل $|A|$. وحدود $|A'|$ هي لذلك متطابقة مع حدود $|A|$.

ونستنتج من هذه النظرية أن كل نظرية في المحدّدات تتعلق بأعمدة مصفوفة تقابلها نظرية موافقة تتعلق بصفوف هذه المصفوفة، والعكس بالعكس.

نظرية (٧ ـ ٢)

إذا كانت A مصفوفة تقع عناصرها في حقل الأعداد المركبة، فإن محدّد مرافق A يساوي مرافق محدّد A ، أي أنه إذا كان $|A| = \Delta$ فعندئذ $|\bar{A}| = \bar{\Delta}$

نستنتج هذا من حقائق أُرسيت في الجبر الابتدائي تقول: إن مرافق مجموع عددين مركبين أو أكثر يساوي إلى مجموع مرافقاتها، ومرافق جداء يساوي إلى جداء المرافقات. وبما أن $|A|$ هو مجرّد مجموع جبري لجداءات معيّنة من عناصر A فإن النظرية تتبع.

نظرية (٧ ـ ٣)

إذا كانت كل عناصر صف (أو عمود) من مصفوفة مربعة A تساوي الصفر، فعندئذ $|A| = 0$.

ذلك لأن كل جداء في مفكوك $|A|$ المعرف في (6.2) يحوي، كعامل، عنصرًا من هذا الصف، وبالتالي فهو صفر.

نظرية (٧ ـ ٤)

إذا ضربنا جميع عناصر صف (أو عمود) من مصفوفة مربعة A بعنصر k من الحقل، فإن محدّد المصفوفة يُضرب بِـ k.

وهذا ناتج من حقيقة أن كل جداء في المفكوك (6.2) يحوي كعامل عنصرًا واحدًا تمامًا من الصف أو العمود المذكور في النظرية. ولا تتأثر خاصة الإيجاب أو السلب لأي زوج. وعلى سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

نظرية (٧ ـ ٥)

إذا تبادل صفان (أو عمودان) من مصفوفة موقعيهما، فإن محدّد المصفوفة يغيّر إشارته.

نبرهن هذه النظرية أولاً من أجل الحالة التي يكون فيها الصفّان المتبادلان صفين متجاورين. ولنفرض عندئذ أننا نرمز بـ A_1 للمصفوفة الناتجة عن تبديل صفين متجاورين في A بحيث يأخذ كل منهما موقع الآخر. ويتضح بالبداهة أن كل جداء في المجموع (6.2) هو، باستثناء ما قد يعود للإشارة، حدّ من $|A_1|$ ، باعتبار أنه يحوي كعامل عنصرًا واحدًا وواحدًا فقط من كل صف ومن كل عمود من A_1 ، والأمر نفسه أيضًا بالنسبة لِـ A. ويتصف أي زوج (a_{ij}, a_{kl}) من جداء ما بأنه إما أن لا يقع أيٌّ، أو يقع واحد فقط، من عناصره في أحد الصفين المعيَّنين، مثل هذا الزوج لا يطرأ عليه أي تغيير فيما يتعلق بخاصة الإيجاب أو السلب. والزوج الوحيد من العناصر الذي تتغير فيه خاصة الإيجاب أو السلب هو الزوج المأخوذ من الصفين اللذين حلَّ كل منهما محل الآخر، وفي هذه الحالة فإن الزوج الموجب يتحول إلى زوج سالب والعكس بالعكس. وبالتالي فإن مبادلة صفين متجاورين تزيد أو تُنقص عدد الأزواج السالبة في كل جداء بمقدار الواحد، أي أنها تغير عدد الأزواج السالبة من عدد زوجي إلى عدد فردي، أو العكس. وهكذا تتغير إشارة كل حدّ من حدود مفكوك المحدّد، أي أن إشارة المحدّد تتغير.

لنعتبر الآن مسألة المبادلة بين الصفين i و j $(i < j)$ ولنفرض وجود k من الصفوف بين الصف i و الصف j. وبمبادلة الصف j على التوالي مع الصفوف الـ $k + 1$ التي تسبقه مباشرة، نضع الصف j في الموقع i. وعندئذ وبمبادلة الصف i على التتالي مع الصفوف الـ k التي تليه مباشرة، نضع الصف i في الموقع j . وهكذا فإننا نولِّد التحويل المرغوب فيه بوساطة $2k + 1$ من التغييرات التي تتناول صفوفًا متجاورة. وبما أن كل تغيير في

الصفوف المتجاورة يغير إشارة المحدّد وأن $2k + 1$ هو عدد فردي ، فمن الواضح أن إشارة المحدّد تتغير.

نظرية (٧ ـ ٦)

إذا تطابق صفان (أو عمودان) في مصفوفة A فإن $|A| = 0$.

ليكن $\Delta = |A|$ و $\Delta_1 = |A_1|$ ، حيث A_1 هي المصفوفة الناتجة عن A بعد مبادلة الصفين المتطابقين فيما بينهما. فمن الواضح أن $A_1 = A$ باعتبار أن الصفين متطابقان وبالتالي فإن $\Delta = \Delta_1$. ولكن من خلال النظرية السابقة $\Delta_1 = -\Delta$ وبالتالي $\Delta = -\Delta$ ، $2\Delta = 0$ أي $\Delta = 0$. [نفرض هنا أن عناصر A لا تقع في حقل مميزه 2].

نظرية (٧ ـ ٧)

إذا تناسب صفان (أو عمودان) في مصفوفة A فإن $|A| = 0$.

ذلك لأنه إذا فرضنا أن الصف j من A هو k مرة الصف i ، فيمكننا عندئذ، وبالاستناد إلى النظرية (٧ ـ ٤)، أن نكتب $|A| = k\,|A_1|$ حيث الصفّان i و j من A_1 متطابقان. ومن النظرية (٧ ـ ٦) نكتب $|A| = k \times 0 = 0$.

تعريـف

إذا حذفنا من مصفوفة مربعة $\underset{n\times n}{A}$ الصف i والعمود j ، فيدعى محدّد المصفوفة المربّعة $(n-1)\times(n-1)$ الناتجة مصغّر العنصر a_{ij} ونرمز له بـ $|M_{ij}|$. والمصغّر المؤشّر $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ يُدعى العامل المرافق لـ a_{ij} في المحدّد ونرمز له بالرمز α_{ij}.

نظرية (٧ ـ ٨)

قيمة المحدّد $|A|$ هي مجموع جداءات عناصر أي صف (أو عمود) من A ، كل منها بعامله المرافق الخاص به؛ وبالرموز نكتب:

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_{it} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{7.1}$$

$$|A| = a_{1i}\alpha_{1i} + a_{2i}\alpha_{2i} + \cdots + a_{ni}\alpha_{ni} = \sum_{t=1}^{n} a_{ti}\alpha_{ti} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{7.2}$$

والمعادلة (7.1) هي عبارة النظرية من أجل الصفوف؛ في حين أن (7.2) عبارتها من أجل الأعمدة. ونبرهن (7.1) أولاً من أجل $i = 1$ ، أي من أجل الصف الأول. وكبداية نلاحظ أن كل حدّ من المجموع (6.2) يحوي كأحد عوامله عنصرًا واحدًا وواحدًا فقط من العناصر $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ التي تشكِّل الصف الأول، بحيث يمكن كتابة $|A|$ على الشكل:

$$|A| = a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n.$$

ونرغب في تبيان أن $k_1 = \alpha_{11}$ ، $k_2 = \alpha_{12}$ ، . . . ، $k_t = \alpha_{it}$ ، حيث نقصد بـ α_{ij} المعنى المعطى في التعريف السابق.

وحدود $|A|$ التي تحوي a_{11} هي

$$\sum (-1)^{\sigma} a_{11}a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \tag{7.3}$$

حيث تتغير i_2 ، i_3 ، . . . ، i_n فوق جميع التباديل الـ $(n-1)!$ الممكنة للأعداد 2 ، 3 ، . . . ، n . و σ هو عدد الأزواج السلبية في الجداء. وبما أن a_{11} تشكل زوجًا إيجابيًّا مع كل عنصر a_{ij} $(i > 1, j > 1)$ من المصفوفة، فمن الواضح أنه يمكن كتابة (7.3) على الشكل:

$$a_{11} \sum (-1)^{\sigma} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

حيث σ الآن هي عدد الأزواج السلبية في الجداء المذكور أمام المجموع Σ . وبالتالي فإن هذا المجموع هو بالتعريف مفكوك المحدّد $\alpha_1 = |M_{11}|$ الذي يحوي $(n-1)$ صفًّا.

ونبيِّن الآن أن المعامل a_{1t} من $|A|$ هو $\alpha_{1t} = |M_{1t}|^{1+t}(-1)$. وللقيام بذلك نحرِّك العمود t فوق الأعمدة الـ $t-1$ التي تسبقه مباشرة ونضعه بذلك في موقع العمود الأول. وهكذا نحصل على مصفوفة جديدة، محددها هو $(-1)^{t-1}|A|$ ، حيث a_{1t} في الموضع (1,1). وبهذه العملية لم يطرأ أي تغيير على المصغّر M_{1t}. وبالاستناد إلى نتائج الفقرة

السابقة يعطي $a_{1t}\,|M_{1t}|$ كل حدود المحدّد الجديد $(-1)^{t-1}|A|$ التي تحوي a_{1t}. وبالتالي سنجد بعد الضرب بـ $(-1)^{t-1}$ أن $(-1)^{t+1}\,a_{1t}\,|M_{1t}| = a_{1t}\,\alpha_{1t}$ يعطي كل الحدود التي تحوي a_{1t} في المحدّد الأصلي $|A|$. ومنه :

$$|A| = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{t+1} a_{1t}\,|M_{1t}| = \sum_{t=1}^{n} a_{1t}\alpha_{1t}, \tag{7.4}$$

وهي العلاقة نفسها (7.1) بعد وضع $i = 1$.

ولبرهان (7.1) في الحالة العامة، لنحرك الصف i فوق الصفوف الـ $(i-1)$ التي تقع فوقه ولنجعله الصف الأول. فنحصل بذلك على مصفوفة جديدة محددها هو $(-1)^{i-1}|A|$ ولم يطرأ فيه أي تغيير على المصغّرات $M_{i1}, \ldots, M_{in}$. وبالاستناد إلى (7.4) لدينا :

$$(-1)^{i-1}\,|A| = \sum (-1)^{t+1} a_{it}\,|M_{it}|.$$

وبضرب الطرفين بـ $(-1)^{i-1}$ نحصل على :

$$|A| = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{i+t}\quad |M_{it}| = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_{it}. \tag{7.1}$$

وتدعى العبارة (7.1) مفكوك المحدّد $|A|$ وفقًا للصف i من صفوفه . ونبرهن بالطريقة نفسها المفكوك (7.2) وفقًا للعمود i من أعمدته .

سنبرهن الآن النظرية المهمة التالية .

نظرية (٧ ـ ٩)

إذا كان الصف i من المصفوفة المربّعة $\underset{n\times n}{A}$ مؤلفًا من العناصر الثنائية :

$$a_{i1} + a'_{i1},\, a_{i2} + a'_{i2},\, \cdots,\, a_{in} + a'_{in},$$

فإن المحدّد $|A|$ يساوي مجموع محدّدين، يحوي أحدهما في صفّه الـ i العناصر $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ، ويحوي الآخر في صفه الـ i العناصر $a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots, a'_{in}$ ، وتبقى الصفوف الأخرى في المحدّدين كما هي في المصفوفة الأصلية .

وبلغة الرموز تقول النظريّة إن :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ونستنتـج صحة النظرية على الفور إذا فككنا (نَشَرْنا) المحدّدات الثلاثة وفقًا للصف i ولاحـظنا أن العوامل المرافقة α_{i1} ، α_{i2} ، . . . ، α_{in} لعناصر الصف i تبقى نفسها من أجل المحدّدات الثلاثة، وهكذا نكتب:

$$\sum_{t=1}^{n} (a_{it} + a'_{it})\alpha_{it} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_{it} + \sum_{t=1}^{n} a'_{it}\alpha_{it}.$$

ونبرهن بعد هذا النظريّة الأساسيّة التالية:

نظرية (٧ ـ ١٠)

إذا أضفنا إلى عناصر أي صف (أو عمود) من مصفوفة A جداءات العناصر الموافقـة لأي صف (أو عمـود) آخر بالعنصر k نفسه من عناصر الحقل، فإن محدّد المصفوفة لا يتغيّر.

لنضف، في A ، إلى عنـاصر الصف i جداء k بالعنـاصر المـوافقة للصف j. فالمصفـوفة الناتجة تحوي عناصر ثنائية في الصف i ومحدّدها يساوي مجموع محدّدين، الصف i في أحدهما هو الصف i نفسه في المصفوفة الأصلية، بينما الصف i في الثانية، هو جداء k في عناصر الصف j ، وكل الصفوف الأخرى في المصفوفتين هي نفسها كما في المصفوفة الأصلية. وبالاستناد إلى النظرية (٧ ـ ٧) فإن محدّد المصفوفة الثانية ينعدم. وفضلاً عن ذلك فإن محدّد المصفوفة الأولى هو محدّد المصفوفة الأصلية A نفسه. وهو المطلوب. وسنبرهن فيما يلي النظرية:

نظرية (٧ ـ ١١)

مجموع جداءات عناصر أي صف (أو عمود) بالعوامل المرافقة الموافقة لصف (أو عمود) آخر هو الصفر، أي أن:

$$a_{i1}\alpha_{j1} + a_{i2}\alpha_{j2} + \cdots + a_{in}\alpha_{jn} = \sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_{jt} = 0, \qquad (i \neq j) \quad (7.5)$$

$$a_{1i}\alpha_{1j} + a_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + a_{ni}\alpha_{nj} = \sum_{t=1}^{n} a_{ti}\alpha_{tj} = 0, \qquad (i \neq j), \quad (7.6)$$

لبرهان (7.5) دعنا نرمز بِـ A_1 للمصفوفة التي نحصل عليها من A بعد أن نجعل عناصر صفه j مساوية للعناصر الموافقة من صفه i ، وتبقى كل الصفوف الأخرى بدون تبديل. وبما أنه يوجد صفان متساويان في المصفوفة الناتجة A_1 فإن محدّدها $|A_1|$ ينعدم. وفضلاً عن ذلك فإن العوامل المرافقة للصف j هي تلك الموجودة في المحدّد الأصلي نفسه. وبفكّ $|A_1|$ وفقًا لعناصر الصف j نحصل على (7.5).

وقد أدخل الرياضي الألماني Leopold Kronecker - (1891 - 1823) الرمز δ_{ij} ، ويدعى دلتا كرونوكر، ليقوم مقام 1 إذا كان $i = j$ ومقام 0 إذا كان $i \neq j$. وإذا استخدمنا هذا الرمز، فيمكن ضم المعادلتين (7.1) و (7.5) في معادلة واحدة، وهكذا نكتب:

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it}\alpha_{jt} = |A|\ \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \quad (7.7)$$

وبصورة مشابهة

$$\sum_{t=1}^{n} a_{ti}\alpha_{tj} = |A|\ \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \quad (7.8)$$

٨ ـ مفكوك لابلاس لمحدّد

لتكن A مصفوفة $m \times n$ وليكن s و t أي عددين صحيحين موجبين بحيث إن $s \leqslant m$ ، $t \leqslant n$. فنرمز بِـ :

$$A_{j_1, j_2, \cdots, j_t}^{i_1, i_2, \cdots, i_s} \quad (8.1)$$

للمصفوفة $s \times t$ الواقعة في الصفوف $i_1, i_2, \ldots, i_s$ والأعمدة $j_1, j_2, \ldots, j_t$ من A. وندعو هذه المصفوفة $s \times t$ مصفوفة مصغّرة من A. وإذا كان $s = t$ ، فتكون المصفوفة المصغّرة مربّعة، ويدعى المحدّد

$$|A_{j_1, j_2, \cdots, j_s}^{i_1, i_2, \cdots, i_s}|$$

محدّدًا مصغّرًا من A. ومن الواضح أن A يحوي محدّدات مصغّرة من جميع المراتب بدءًا من 1 ، أي العناصر نفسها، إلى n إذا كان $m = n$ أو إلى الأصغر منها إذا كان $m \neq n$.

ليكـــن $s < m$ ولـيكــن i_{s+1} ، i_{s+2} ، . . . ، i_m تمثيلاً لتلك الأعـــداد من 1 ، 2 ، . . . ، m غير الموجودة بين i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s . وباصطلاح مماثل فيما يتعلق بمعنى المقادير j ، تدعى المصفوفة المصغرة

$$A^{i_{s+1},\dots,i_m}_{j_{s+1},\dots,j_n} \qquad (8.2)$$

المصغّرة المتمّمة للمصفوفة في (8.1). ومن الواضح أن (8.1) هي أيضًا المصغّرة المتمّمة لِـ (8.2).

وفي الحـالـة الخـاصـة $m = n$ حيث تكون A مصفوفة مربّعة $n \times n$ ، نصوغ التعريف التالي:

تعريـف

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$. فنعني بالمتممة الجبرية لمحدّد مصغّر $A^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_s}$ من A فيه s صفًّا، المحدّد المؤشر $(-1)^\rho \, |A^{i_{s+1},\dots,i_n}_{j_{s+1},\dots,j_n}|$، الذي يحوي $(n-s)$ صفًّا حيث:

$$\rho = i_1 + i_2 + \cdots + i_s + j_1 + j_2 + \cdots + j_s. \qquad (8.3)$$

وإذا وضعنـا $\sigma = i_{s+1} + i_{s+2} + \dots + i_n + j_{s+1} + j_{s+2} + \dots + j_n$ فيتضح على الفور أن

$$\rho + \sigma = i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = 2\,(1 + 2 + \dots + n)$$

ونستنتج بالتالي أن ρ و σ إمّا أن يكونا زوجيين معًا أو فرديين معًا.

نظرية (٨ ـ ١)

إذا كانت $M = A^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_s}$ و $N = A^{i_{s+1},\dots,i_n}_{j_{s+1},\dots,j_n}$ مصفـوفتـين مصغـرتين متتابعتين من مصفوفة مربّعة A ، وإذا كان $(-1)^\rho |N|$ المتمّم الجبري لِـ $|M|$ ، فعندئذ يكون $(-1)^\rho |M|$ هو المتمّم الجبري لِـ $|N|$.

في الحالة الخاصة حيث $i_1 = j_1$ ، $i_2 = j_2$ ، . . . ، $i_s = j_s$ ، تدعى المصفوفة المصغّرة $A^{i_1, i_2, \dots, i_s}_{i_1, i_2, \dots, i_s}$ مصفـوفـة مصغّـرة رئيسة، ومحدّدها هو محدّد مصغّر أساسي لِـ A. ومن الواضح أن المتمّم الجبري لمحدّد مصغّر أساسي هو متمّمه العادي نفسه.

وقد وُجد أنه من المناسب غالبًا اعتبار المصفوفة المربّعة A واحدة من المصفوفات المصغّرة الخاصة بـ A. وفي هذه الحالة نعرّف المتمّم الجبري لِـ $|A|$ بأنه 1.

ونبرهن الآن نظرية مهمة تُعزى إلى الرياضي الفرنسي Laplace (1827 - 1749). ونعرض النظرية هنا من أجل صفوف A ، ولكنها بوضوح صحيحة من أجل الأعمدة، أي إذا حلّت كلمتا الصف والعمود كل منهما محل الأخرى.

نظرية (٨ ـ ٢) نظرية لابلاس (Laplace)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها من حقل $\mathscr{F}$. اختر من A أي s من الصفوف، ولتكن الصفوف i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s. ومن هذه الصفوف الـ s شكّل جميع المحدّدات ذات الـ s صفًّا التي يمكن الحصول عليها باختيار s من الأعمدة، ولتكن الأعمدة j_1 ، j_2 ، . . . ، j_s ، مثلًا، وسيوجد من مثل هذه المحدّدات $\frac{n!}{s!\,(n-s)!}$ محدّدًا. فمجموع جداءات هذه المحدّدات المصغّرة بمتمّماتها الجبرية يساوي، $|A|$ ، محدّد A ، أي أن

$$\sum (-1)^{\varrho}\, |A^{i_1, i_2, \ldots, i_s}_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|\, |A^{i_{s+1}, \ldots, i_n}_{j_{s+1}, \ldots, j_n}| = |A|, \qquad (8.4)$$

حيث يمتدّ المجموع فوق جميع توافيق s من الأعمدة (j_1 ، j_2 ، . . . ، j_s) مأخوذة من الـ n عمودًا 1 ، 2 ، . . . ، n ، و ϱ كما عرّفناها في (8.3).

ونبرهن هذه النظرية مبدئيًا في الحالة التي تكون فيها الصفوف الـ s المختارة هي الصفوف الـ s الأولى من A ، أي $(i_1, i_2, \ldots, i_s) = (1, 2, \ldots, s)$.

لنعتبر الآن المحدّد $|A^{1,2,\ldots,s}_{1,2,\ldots,s}|$ للمصفوفة المصغّرة الأساسية ذات الـ s صفًّا التي تقبع في الزاوية اليسرى العليا من A. فيكون المتمّم الجبري عندئذ هو المحدّد $|A^{s+1,\ldots,n}_{s+1,\ldots,n}|$ للمصفوفة المصغّرة الأساسيّة ذات الـ $(n-s)$ صفًّا التي تقبع في الزاوية اليمنى السفلى. وحدود الجداء هي من الشكل:

$$(-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{si_s} (-1)^{\tau} a_{s+1\, i_{s+1}} \cdots a_{ni_n} = (-1)^{\sigma}\pi_1 (-1)^{\tau}\pi_2, \qquad (8.5)$$

حيث i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s هو أحد تباديل الأعداد 1 ، 2 ، . . . ، s ، σ ترمز لعدد

الأزواج السلبية في الجداء π_1 ، في حين أن j_{s+1} ، . . . ، j_n هو أحد تباديل الأعداد $s+1$ ، . . . ، n و τ عدد الأزواج السلبية في الجداء π_2 .

ويمكن كتابة الجداء في (8.5) على الشكل:

$$(-1)^{\sigma+\tau} a_{1i_1} \cdots a_{si_s} a_{s+1\,j_{s+1}} \cdots a_{nj_n} .$$

ومن الواضح هنا أن i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s ، j_{s+1} ، . . . ، j_n هو أحد تباديل الأعداد 1 ، 2 ، . . . ، n. وفضلاً عن ذلك، وبما أن كل i هو أقل من أي j ، فإنّ كل a من π_1 يشكّل مع أي a من π_2 زوجًا إيجابيًا بحيث يكون عدد الأزواج السلبية في (8.5) هو بدقة $\sigma + \tau$. وبالتالي فإن كل حدٍّ في (8.5) هو حد من مفكوك $|A|$. وبما أن كل الحدود الـ $s!$ من $|A^{1\,2\,\cdots\,s}_{i_1 i_2 \cdots i_s}|$ مثلها مثل كافة الـ $(n-s)!$ حدًّا في $|A^{s+1\,\cdots\,n}_{j_{s+1}\cdots j_n}|$ هي حدود متميّزة، فإننا نحصل من الجداء على الـ $s!\,(n-s)!$ من حدود $|A|$ المتميّزة.

لنختر بعد ذلك مصفوفة مصغّرة $s \times s$ ولتكن $M = A^{1\,2\,\cdots\,s}_{l_1 l_2 \cdots l_s}$ من الصفوف الـ s الأولى والأعمدة $l_1, l_2, \ldots, l_s$. وبإجراء انسحاب للعمود l_1 فوق الـ $l_1 - 1$ عمودًا الواقعة على يساره، وللعمود l_2 فوق $l_2 - 2$ عمودًا التي تسبقه، وأخيراً سحب العمود l_s فوق الـ $l_s - s$ عمودًا إلى يساره، نجلب M إلى الزاوية اليسرى العليا من المصفوفة. وبهذه الطريقة لا يتغير أي من M ومتمّمتها N ، في حين يكون محدّد المصفوفة الجديدة هو

$$(-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_s-(1+2+\cdots+s)}\,|A|. \tag{8.6}$$

وبالاستناد إلى النتائج التي أثبتناها في الفقرة السابقة فإن الجداء $|N|$. $|M|$ يعطي $s!\,(n-s)!$ من الحدود المتميّزة من المفكوك المذكور في (8.6). وإذا ضربنا الآن بـ $(-1)^{\rho}$ ، حيث $\rho = l_1 + l_2 + \ldots + l_s + (1 + 2 + \ldots + s)$ ، نستنتج أن $|M|\,(-1)^{\rho}|N|$ أو $|M| \times$ [المتمم الجبري لِـ $|M|$] يتمخض عن $s!\,(n-s)!$ من حدود $|A|$ نفسها. وهذه الحدود جميعها متميّزة من حدٍّ لآخر، ومتميّزة عن تلك التي حصلنا عليها في (8.5). وبما أنه يوجد $\binom{n}{s} = \dfrac{n!}{s!\,(n-s)!}$ من الجداءات $|N|$. $|M|$ ، فنحصل بهذه الطريقة على $n!$ من الحدود، أي جميع حدود $|A|$.

وهكذا تكون نظرية لابلاس قد بُرهنت من أجل الصفوف الـ s الأولى من A.

دعنـا نفـرض فيما يلي أن الـصفـوف الـ s المـختـارة هي الـصفـوف k_1 ، k_2 ، . . . ، k_s . وبإجراء عملية مبادلة بين هذه الصفوف الـ s والصفوف التي تقـع فوقهـا مبـاشرة، يمكننـا، وبـدون تغيير ترتيبهـا النسبي، جعلهـا الصفـوف الـ s الأولى. لنختـر في المصفـوفـة الجـديدة A_1 ، مصفوفة مصغرة M من الصفوف الـ s الأولى والأعمدة l_1 ، l_2 ، . . . ، l_s . فإذا كانت N عندئذ هي المصفوفة المتممة لِـ M ، نجد بالاستناد إلى الفقرة السابقة أن

$$\sum |M| (-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_s+(1+2+\cdots+s)} |N| \\ = |A_1| = (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_s+(1+2+\cdots+s)} |A|.$$

وبضرب الطرفين بِـ $(-1)^\sigma$ حيث $\sigma = k_1 + \ldots + k_s - (1 + 2 + \ldots + s)$ ، نجد

$$\sum |M| (-1)^{k_1+\cdots+k_s+l_1+\cdots+l_s+\cdots+l_s} |N| = |A|,$$

أو

$\Sigma\, |M|$ [المتمم الجبري لِـ $|M|$] $= |A|$.

وهكذا تكون نظرية لابلاس قد بُرهنت تمامًا.

٩ ـ محدّد جداء مصفوفتين

نبرهن الآن النظرية المهمة:

نظرية (٩ ـ ١)

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفـوفـة $m \times n$ و $B = (b_{ij})$ مصفـوفـة $n \times m$ بحيث إن $P = AB$ هو مصفوفة مربّعة $m \times m$. ومن أجل $m \leqslant n$ ، لنرمز بِـ $A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ للمصفوفة ذات الصفـوف الـ m الـواقعـة في الأعمـدة i_1 ، i_2 ، . . . ، i_m من A ، ولنـرمـز بـ $B^{j_1, j_2, \ldots, j_m}$ للمصفوفة ذات الصفوف الـ m الواقعة في الصفوف j_1 ، j_2 ، . . . ، j_m من B فعندئذ ومن أجل $m \leqslant n$ لدينا $|P| = \Sigma\, |A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}|\, |B^{i_1, i_2, \ldots, i_m}|$ حيث يمتد المجموع فوق الـ $\binom{n}{m}$ متوافقة i_1 ، i_2 ، . . . ، i_m لِـ n من الأشياء مأخوذ m منها في وقت واحد، بينما $|P| = 0$ من أجل $m > n$.

نعتبر أولاً الحالة $m \leqslant n$. فيمكن كتابة المحدّد $|P|$ للجداء $P = AB$ كما يلي:

$$|P| = \begin{vmatrix} \sum a_{1t_1} b_{t_1 1} & \sum a_{1t_2} b_{t_2 2} & \cdots & \sum a_{1t_m} b_{t_m m} \\ \sum a_{2t_1} b_{t_1 1} & \sum a_{2t_2} b_{t_2 2} & \cdots & \sum a_{2t_m} b_{t_m m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sum a_{mt_1} b_{t_1 1} & \sum a_{mt_2} b_{t_2 2} & \cdots & \sum a_{mt_m} b_{t_m m} \end{vmatrix}, \tag{9.1}$$

حيث يتحول كل من أدلّة الجمع t_1 ، t_2 ، . . . . ، t_m فوق المدى 1 ، 2 ، . . . . ، n ، وبما أن كلاً من أعمدة P يتألف من مجموع n من العناصر، فيمكننا، وفقاً للنظرية (٧ ـ ٩)، تجزئة المحدّد إلى مجموع n^m من المحدّدات، كل منها من الشكل التالي:

$$\begin{vmatrix} a_{1t_1} b_{t_1 1} & a_{1t_2} b_{t_2 2} & \cdots & a_{1t_m} b_{t_m m} \\ a_{2t_1} b_{t_1 1} & a_{2t_2} b_{t_2 2} & \cdots & a_{2t_m} b_{t_m m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mt_1} b_{t_1 1} & a_{mt_2} b_{t_2 2} & \cdots & a_{mt_m} b_{t_m m} \end{vmatrix}, \tag{9.2}$$

والذي يمكن كتابته، بعد أخذ $b_{t_1 1}$ ، $b_{t_2 2}$ ، . . . . ، $b_{t_m m}$ خارج الأعمدة الأول، الثاني، الـ m ، على الترتيب، على الشكل:

$$\begin{vmatrix} a_{1t_1} & a_{1t_2} & \cdots & a_{1t_m} \\ a_{2t_1} & a_{2t_2} & \cdots & a_{2t_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mt_1} & a_{mt_2} & & a_{mt_m} \end{vmatrix} \cdot (b_{t_1 1}\ b_{t_2 2} \cdots b_{t_m m}). \tag{9.3}$$

وهذه المحدّدات في (9.3) ، التي يتساوى من أجلها دليلان أو أكثر من الأدلة t_j ، تنعدم *وبالتالي* يمكن إهمالها. ليكن الآن $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ اختياراً خاصّاً من m من الأعداد 1 ، 2 ، . . . ، n ولنعرّف كما في نص النظرية:

$$|A_{i_1, i_2, \cdots, i_m}| = \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \tag{9.4}$$

وإذا كانت t_1 ، t_2 ، . . . . ، t_m أحد تباديل المقادير i ورمزنا بـ ρ'' *لعدد ارتدادات* هذا

التبديل عن الترتيب الطبيعي (i_1 ، i_2 ، . . . ، i_m)، فيمكن كتابة العبارة في (9.3) على الشكل:

$$|A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}|\,(-1)^p b_{t_1 1} b_{t_2 2} \cdots b_{t_m m}.$$

والآن وطالما أن t_1 ، t_2 ، . . . ، t_m تتغير فوق جميع التباديل الـ $m!$ لـ i_1 ، i_2 ، . . . ، i_m ، فإن المجموع

$$\sum (-1)^p b_{t_1 1} b_{t_2 2} \cdots b_{t_m m}$$

هو بدقة قيمة المحدّد:

$$\begin{vmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} & \cdots & b_{i_1 m} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} & \cdots & b_{i_2 m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{i_m 1} & b_{i_m 2} & \cdots & b_{i_m m} \end{vmatrix} = |B^{i_1,i_2,\ldots,i_m}|.$$

وبالتالي:

$$|P| = \sum |A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}|\,|B^{i_1,i_2,\ldots,i_m}|, \qquad (9.5)$$

حيث يمتد المجموع فوق الـ $\binom{n}{m}$ متوافقة (i_1 ، i_2 ، . . . ، i_m) للأعداد 1 ، 2 ، . . . ، n ؛ مأخوذة m في وقت واحد. وهكذا نكون قد برهنا النظرية من أجل $m \leqslant n$.

إذا كانت $m > n$ فيمكننا بدون تغيير الجداء $P = AB$ الحصول على مصفوفتين جديدتين A_1 و B_1 بأن نلحق بـ A أعمدة إضافية من الأصفار عددها $(m - n)$ ونلحق $(m - n)$ من الصفوف المؤلفة من الأصفار بـ B. وبما أن كلًّا من المصفوفتين A_1 و B_1 يحوي محدّدًا واحدًا فقط من m صفًّا، أي $|A_1|$ و $|B_1|$ ، على الترتيب، وكل منهما يساوي الصفر، فإن الجزء الأول من النظرية يعطي $|P| = |A_1| . |B_1| = 0$. وهكذا تكون النظرية قد بُرهنت تمامًا.

والحالة $m = n$ ذات أهمية خاصة. ففي هذه الحالة تحوي كل من المصفوفتين A ، B مصفوفة مصغّرة واحدة فقط ذات m صفًّا، ونعني $|A|$ و $|B|$ على الترتيب. والعلاقة (9.5) تعطي النظرية المهمة التالية:

نظرية (٩ ـ ٢)

إذا كانت A و B مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ، فعندئذ $|AB| = |A| . |B|$ ؛ أي أن محدّد جداء مصفوفتين مربّعتين يساوي جداء محدّديهما.

باستقراء بسيط، يمكن تعميم هذه النظرية الأخيرة إلى جداء أي عدد من المصفوفات المربّعة.

والآن لنأخذ المصفوفتين $\underset{m \times n}{A}$ و $\underset{n \times q}{B}$ بحيث إن $AB = P$ حيث P مصفوفة $m \times q$. ليكن s صحيحًا موجبًا لا يزيد على m أو q ولتكن $P^{i_1, \ldots, i_s}_{j_1, \ldots, j_s}$ المصفوفة المربّعة $s \times s$ الواقعة في الصفوف i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s وفي الأعمدة j_1 ، j_2 ، . . . ، j_s من P. وإذا كانت C عندئذ هي المصفوفة $s \times n$ المؤلّفة من الصفوف i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s من A ، وكانت D المصفوفة $n \times s$ المؤلّفة من الأعمدة j_1 ، j_2 ، . . . ، j_s من B ، فمن الواضح أن

$$CD = A^{i_1, i_2, \ldots, i_s}_{1, 2, \ldots, n} B^{1, 2, \ldots, n}_{j_1, j_2, \ldots, j_s} = P^{i_1, \ldots, i_s}_{j_1, \ldots, j_s}.$$

وتُنتج النظرية (٩ ـ ١) مطبقة على هذه الحالة:

نظرية (٩ ـ ٣)

لتكن A مصفوفة $m \times n$ و B مصفوفة $n \times q$ وليكن s صحيحًا موجبًا لا يزيد على m أو q. إذا كانت Q المصفوفة المصغّرة المربّعة $s \times s$ الواقعة في الصفوف i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s والأعمدة j_1 ، j_2 ، . . . ، j_s من مصفوفة الجداء $P = AB$ ، فعندئذ يكون $|Q| = 0$ إذا كان $s > n$ ، أما إذا كان $s \leq n$ فإن $|Q|$ يكون مساويًا لمجموع $\binom{n}{s}$ من الحدود، كل حد منها هو جداء محدّد مصغّر، فيه s صفًا، ويقع في الصفوف i_1 ، i_2 ، . . . ، i_s والأعمدة t_1 ، t_2 ، . . . ، t_s من A ، بمحدّد مصغّر، آخر فيه s صفًا، ويقع في الصفوف t_1 ، t_2 ، . . . ، t_s وفي الأعمدة j_1 ، j_2 ، . . . ، j_s من B ، حيث تتغير t_1 ، t_2 ، . . . ، t_s فوق جميع الـ $\binom{n}{s}$ من متوافقات n من الأعداد 1 ، 2 ، . . . ، n مأخوذة s في وقت واحد، أي أن:

$$|Q| = |P^{i_1, i_2, \ldots, i_s}_{j_1, j_2, \ldots, j_s}| = \sum_t |A^{i_1, i_2, \ldots, i_s}_{t_1, t_2, \ldots, t_s}| \, |B^{t_1, t_2, \ldots, t_s}_{j_1, j_2, \ldots, j_s}|.$$

تماريـن

بيِّن بدون فكّ المحدّدات أن العلاقات التالية صحيحة :

١)
$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = 0$$

٢)
$$\begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ z_1+x_1 & z_2+x_2 & z_3+x_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

٣)
$$\begin{vmatrix} 2a_1+b_1 & 2b_1+c_1 & 2c_1+a_1 \\ 2a_2+b_2 & 2b_2+c_2 & 2c_2+a_2 \\ 2a_3+b_3 & 2b_3+c_3 & 2c_3+a_3 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

٤)
$$\begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}, \; xyz \neq 0.$$

ثم بيِّن أن المحدّد على اليسار يحوي العامل $xy + xz + yz$.

٥) إذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ فحدِّد إشارة الحد المتعلق بالقطر الثانوي .

$$a_{n,1}\, a_{n-1,2} \cdots a_{2,n-1}\, a_{1,n}$$

من $|A|$.

٦) إذا كانت A هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$، فانشر $|A|$ وفقًا لعناصر الصف الثالث

ثم حقِّق النتيجة بنشره وفقًا لعناصر العمود الثاني .

٧) إذا كانت B المصفوفة $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ فأوجد العوامل المرافقة لعناصر الصف الثاني

وتحقّق من أن العلاقات في (7.7) صحيحة .

٨) إذا كانت A هي المصفوفة $\begin{bmatrix} -6/7 & 2/7 & 3/7 \\ 2/7 & -3/7 & 6/7 \\ 3/7 & 6/7 & 2/7 \end{bmatrix}$ فبيِّن أن كل عنصر يساوي إلى العامل المرافق الخاص به في $|A|$. تحرَّ وجود خواص مشابهة للمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

٩) إذا كانت C هي المصفوفة $C = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

فبيِّن أن العامل المرافق لعنصر في أي صف هو بدقة العنصر الموافق من العمود الذي له الرقم نفسه .

١٠) إذا كانت $a \neq b$ ، فبيِّن بدون نشر المحدّد أن للمعادلة التربيعية :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = 0$$

جذرين هما a و b.

١١) دون اللجوء إلى النشر، بيِّن أن للمعادلة التكعيبية

$$\begin{vmatrix} x & a & b \\ b & x & a \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

جذرًا هو $x = -a - b$. أوجد الجذرين الآخرين .

١٢) إذا كانت A مصفوفة مربّعة $n \times n$ وكانت α_{ij} ترمز للعامل المرافق لِـ a_{ij} في $|A|$ ، فبيِّن أن المحدّد :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & u_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & u_n \\ v_1 & \cdots & v_n & 0 \end{vmatrix}$$

للمصفوفة المعطاة يساوي $-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_i v_j$

١٣) ليكن $p_{ij} = \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{vmatrix}$ بيِّن بالاستناد إلى نشر لابلاس للمحدّد

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

أن

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

١٤) إذا كان $A = \begin{bmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ b_0 & 2b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & 2b_1 & b_2 \end{bmatrix}$, $\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ فبيِّن أن

$$|A| = \Delta_{02}^2 - 4\,\Delta_{01}\,\Delta_{12}$$

١٥) بيِّن أنه إذا كان $B = \begin{bmatrix} 0 & h & -g & l \\ -h & 0 & f & m \\ g & -f & 0 & n \\ -l & -m & -n & 0 \end{bmatrix}$, فعندئذ $|B| = (fp + gm + hn)^2$.

١٦) استخدم النظرية (٩ ـ ١) لبرهان المطابقة :

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2.$$

إرشاد: خـذ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$, و $B = A'$.

١٧) عمِّم التمرين ١٦ إلى ما يلي:

$$\begin{vmatrix} \sum a_i^2 & \sum a_i b_i \\ \sum a_i b_i & \sum b_i^2 \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}^2,$$

حيث يمتـد كل مجمـوع على اليسار من 1 إلى n ، في حين أنه تمتد تلك الموجودة على اليمين فوق جميع الـ $\frac{n(n-1)}{2}$ من متوافقات الأعداد 1 ، 2 ، . . . ، n مأخوذة اثنتين في وقت واحد $(i < j)$.

١٨) بالإشـارة إلى المصفـوفـة A في (5.5) ، لتكن كل مصفـوفة جزئية $A_{ij} = 0$ من أجل $i < j$. بينّ عندئذ أن $|A| = |A_{11}|\,|A_{22}| \ldots |A_{ss}|$.

١٩) بيِّن أنه إذا قمنا بمبادلة صفين متجاورين من مصفوفة مربعة A ، فإن العامل المرافق لكل عنصر يغيِّر إشارته .

٢٠) ليكن $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ أحد تباديل الأعداد (1 ، 2 ، . . . ، n)، ولنرمز σ لعدد الارتدادات في π عن الترتيب الطبيعي $v = (1, 2, \ldots, n)$. بيِّن أنه يمكن إعادة π إلى الترتيب الطبيعي v بإجراء σ من المبادلات المتتالية بين عنصرين متجاورين .

٢١) نقصد بأثر مصفوفة مربّعة $\underset{n \times n}{A}$ (ونكتبها $tr\, A$) مجموع عناصر القطر الرئيسي من A ، أي أن $tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. برهـــن ما يلي: (١) إذا كان k عددًا سُلَّمـيًّا فإن $\mathrm{tr}\,(kA) = k\, tr\,(A)$ ، (٢) $tr\,(A \pm B) = tr\,(A) \pm tr\,(B)$ و(٣) $tr\, AB = tr\, BA$.

الفصل الثالث

التحويلات الأولية لمصفوفة

١٠ - رتبة مصفوفة

لتكن A مصفوفة $m \times n$ عناصرها من حقل $\mathcal{F}$. إذا اخترنا من A أي $s \leqslant m$ من الصفوف وأي $t \leqslant n$ من الأعمدة، فإن العناصر كما تقع في هذه الـ s من الصفوف والـ t من الأعمدة تشكل مصفوفة مصغّرة من A. وبقبول الحالة الحدّية $s = m$، $t = n$ تشمل المصفوفة A نفسها بين المصفوفات المصغّرة. وإذا كان $s = t$ بحيث تصبح المصفوفة المصغّرة مربّعة، فيدعى عندئذ محدّد المصفوفة المصغّرة محدّدًا مصغّرًا لِـ A. ومن الواضح أن A تحوي محدّدات مصغّرة من جميع المراتب بدءًا من الواحد، أي العناصر نفسها، حتى m أو n أيهما أقلّ.

تعريف

إذا كانت A تحوي، على الأقل، محدّدًا مصغّرًا واحدًا من المرتبة r ولا يساوي الصفر، ولكن جميع محدّداتها المصغّرة من المرتبة $r + 1$ تساوي الصفر، فنقول عندئذ إن رتبة A هي r. وإذا كانت $A = 0$ نقول إن رتبة A تساوي الصفر.

إذا كان $r = m$ أو $r = n$، فمن الواضح أن A لا تحوي أي محدّد مصغّر فيه $(r + 1)$ صفًّا. وإذا كان $r < m$ و $r < n$، فإن التعريف يتضمن أن A تحوي على الأقل محدّدًا أو مصغّرًا واحدًا فيه $(r + 1)$ صفًّا، ولكن قيمة كل من هذه المحدّدات المصغّرة تساوي الصفر.

وعلى سبيل المثال، المصفوفتان $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ لهما رتب تساوي واحدًا واثنين على الترتيب.

تعريـف

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ بعناصر من حقل ما . فيقال عندئذ إن A غير شاذة أو شاذة وفقًا لما إذا كان $|A| \neq 0$ أو $|A| = 0$.

وعلى سبيل المثال، المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ غير شاذة، بينما المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ شاذة.

وبـدلالـة الـرتبـة r ، تكون A غير شاذة إذا كانت $r = n$ ، وشاذة إذا كانت $r < n$ ، ولن نستخدم هنا المصطلحين شاذة وغير شاذة بالنسبة للمصفوفات غير المربّعة.

١١ ـ المنقول، المرافق، ومرافق المنقول لمصفوفة

لتكن $\underset{m \times n}{A}$ مصفوفة عناصرها أعداد حقيقية أو مركبة. لقد عرَّفنا في الفقرة ٧ منقـول A (ونـرمـز له بـ A')، مرافق A (ونرمز له بـ $\bar{A}$)، ومرافق المنقول A^*. ومن الـواضـح أنه يوجد من أجل كل محدّد مصغّر، من A المحدّد نفسه في A' . وفضلاً عن ذلـك، وبـما أنـه من المعـروف في الجبر الابتدائي أن مرافق مجموع (أو جداء) يسـاوي مجمـوع (أو جداء) المرافقين، فنستنتج أنه يوافق كل محدّد مصغّر Δ من A محدّدًا مصغرًا $\bar{\Delta}$ يقع في $\bar{A}$ وأيضًا في A^* . وبالتالي فإننا نستنتج في الحال النظريتين التاليتين:

نظرية (١١ ـ ١)

للمصفوفات A ، A' ، $\bar{A}$ ، و A^* جميعها الرتبة نفسها.

نظرية (١١ ـ ٢)

تكون المصفوفة A حقيقية إذا وفقط إذا كان $A = \bar{A}$.

إذا كانت $\underset{m \times n}{A}$ هي المصفـوفـة (a_{ij}) ، فنـرمـز لعنصر الصف i والعمـود j من A' بـ a'_{ij} ، ومـنـــه $a'_{ij} = a_{ji}$ ، $(i = 1, \ldots, n)$ ، $(j = 1, \ldots, m)$. والآن لتكن A وB مصفـوفتـين $m \times n$ ولتكن $C = A + B$ ، بحيث إن $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. فنستنتج عندئذ أن $c'_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a'_{ij} + b'_{ij}$. ومـنـــه وبـأخـذ مرافـق الـطرفـين نجـد $\bar{c}'_{ij} = \bar{a}'_{ij} + \bar{b}'_{ij}$. وهكذا نكون قد برهنا النظرية:

نظرية (١١ - ٣)

إذا كانت A و B مصفوفتين $m \times n$ فعندئذ:

$$(A+B)' = A' + B'; \quad \overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}; \quad (A+B)^* = A^* + B^*$$

ونعرض الآن النظرية التالية، ونترك برهانها للطالب:

نظرية (١١ - ٤)

إذا كان k عددًا سُلَّمِيًّا فإن $(kA)' = kA'$ ، $\overline{(kA)} = \bar{k}\,\bar{A}$ ؛ $\overline{(kA)}^* = \bar{k}A^*$.
وإذا كان k حقيقيًّا فإن $\overline{(kA)} = k\bar{A}$ ، $(kA)^* = kA^*$.

نتيجة (١١ - ٥)

إذا كان k وl عددين سُلَّميين فإن $(kA + lB)' = kA' + lB'$ ،
$\overline{(kA + lB)} = \bar{k}\bar{A} + \bar{l}\bar{B}$ ، $(kA + lB)^* = \bar{k}A^* + \bar{l}B^*$.

ونبرهن الآن النظرية المهمة التالية:

نظرية (١١ - ٦)

إذا كانت A مصفوفة $m \times n$ ، B مصفوفة $n \times q$ ، و $C = AB$ مصفوفة $m \times q$ ،
فعندئذ $C' = B'A'$. أي أن منقول جداء مصفوفتين يساوي جداء منقوليهما بترتيب معكوس.

نلاحظ أولاً أن الأبعاد صحيحة. ذلك لأن C' هي مصفوفة $q \times m$ ، وبما أن B' هي مصفوفة $q \times n$ بينما A' مصفوفة $n \times m$ ، فتكون عندئذ $B'A'$ مصفوفة $q \times m$. والآن لدينا

$$c_{ij} = \sum a_{it} b_{tj} \text{ ومنه } c'_{ij} = c_{ji} = \sum a_{jt} b_{ti} = \sum a'_{tj} b'_{it}$$

أي أن $c'_{ij} = \sum b'_{it} a'_{tj}$ = جداء الصف i من B' في العمود j من A'.

وبالاستقراء، يمكن تعميم النظرية مباشرة إلى جداء أي عدد من المصفوفات.
فلنفرض أن النظرية صحيحة من أجل جداء $t - 1$ من المصفوفات، ولنبرهن أنها

صحيحة من أجل جداء t من المصفوفات . ليكن

$$P = A_1A_2 \cdots A_{t-1}A_t.$$

فإذا كتبنا $Q = A_1A_2 \ldots A_{t-1}$ ، فعندئذ يكون $P = QA_t$ ومن الفقرة السابقة

$$P' = A'_tQ'$$

ولكن من الفرض الاستقرائي ، وباعتبار Q هي جداء $t-1$ من المصفوفات نكتب :

$$Q' = A'_{t-1} \cdots A'_2A'_1,$$

ومنه

$$P' = A'_tA'_{t-1} \cdots A'_2A'_1,$$

كما ذكرنا أعلاه .

نتيجة (١١ - ٧)

مرافق منقول جداء مصفوفتين أو أكثر يساوي جداء مرافقات المناقيل بترتيب معكوس .

١٢ - التحويلات الأوّلية مطبَّقة على مصفوفة

لتكن $\underset{m \times n}{A}$ مصفوفة (a_{ij}) بعناصر من حقل $\mathscr{F}$. نقصد من عبارة تحويل أولي على A تحويلاً من أحد الأنواع التالية :

(I) المبادلة بين صفَّين أو عمودين .

(II) جداء جميع عناصر صف (أو عمود) بعنصر k لا يساوي الصفر من الحقل $\mathscr{F}$.

(III) أن نجمع إلى عناصر صف (أو عمود) جداء العناصر الموافقة لصف آخر (أو عمود آخر) بالعنصر k نفسه من $\mathscr{F}$.

ومن الواضح أن لكل تحويل أولي تحويلاً معاكسًا هو نفسه تحويل أولي .

ومن الواضح أن أبعاد مصفوفة لا تتغير من خلال تحويلات أولية ، متتالية . وبالتالي فإن عملية أخذ المنقول لمصفوفة $m \times n$ ليست نتيجة تحويلات أولية متتالية .

وأبعاد المصفوفة $\underset{m \times n}{A}$ ليست الوحيدة التي تبقى ثابتة تحت التحويلات الأولية ، ففي الحقيقة سنبرهن الآن النظرية التالية :

نظريـة (١٢ ـ ١) .

لا تتغير رتبة مصفوفة A نتيجة تحويلات أوّلية متتالية .

من الواضح أولاً أن التحويلات من النوع (I) و (II) لا تؤثّر في الرتبة ، باعتبارها لا تؤثّر استنادًا إلى النظريتين (٧ ـ ٤) و(٧ ـ ٥) ، بانعدام أو عدم انعدام أي محدّد من المصفوفة .

لنعتبر إذن التحويل (III) ولنفرض أننا أضفنا إلى الصف i من A جداء k بالصف j. لتكن r رتبة A ، ولنرمز بـ B للمصفوفة الناتجة عن التحويل . وسنبيّن أن رتبة B أصغر أو تساوي r. إذا كان $r = m$ أو $r = n$ فإن رتبة B هي بوضوح أصغر أو يساوي r. لنفرض عندئذ أن $r < m$ ، $r < n$ ، ولنعتبر محدّدًا مصغّرًا Δ من B فيه $(r + 1)$ صفًّا . فإذا كان Δ يحوي كلًّا من الصفّين i وj من A ، أو الصف j فقط ، فمن الواضح أن قيمة Δ لم تتغير من التحويل ، وهو بالتالي واحد من محدّدات A ذات الـ $(r + 1)$ صفًّا ، أي أنه ينعدم . وإذا كان Δ يحوي الصف i ولكنه لا يحوي الصف j ، فمن النظريتين (٧ ـ ٩) و(٧ ـ ٤) يمكننا أن نكتب $\Delta = \Delta_1 + k\,\Delta_2$ حيث Δ_1 و Δ_2 هما ، باستثناء ما يمكن أن يتعلق بالإشارة ، محدّدات من A ذات $(r + 1)$ من الصفوف وبالتالي فهي تنعدم . ومنه $\Delta = 0$. وبما أن كل محدّد ذي $(r + 1)$ صفًّا من B يساوي الصفر ، فإن رتبة B لا يمكن أن تتجاوز r. وهكذا فإنه لا يمكن رفع رتبة مصفوفة بتحويل أولي من النوع (III) . كما لا يمكن تخفيض الرتبة ، ذلك لأنه إذا أمكن ذلك فإن التحويلات المعاكسة سترفعها . أي أن الرتبة لم تتغير.

ونبرهن الآن النظرية المهمة التالية :

نظريـة (١٢ ـ ٢)

يمكن اختزال مصفوفة $A_{m\times n}$ رتبتها r وعناصرها من حقل $\mathcal{F}$ إلى شكل N يحوي المقادير I في الأمكنة الـ r الأولى من القطر الرئيس وأصفارًا فيما عدا ذلك ، وذلك بعدد من التحويلات الأوليّة المتتابعة .

نلاحظ أولاً أن مصفوفة من الرتبة 0 هي من حينها على الشكل N. لنفرض عندئذ كأساس للبرهان بالاستقراء أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفة رتبتها $r-1$ $(r \geqslant 1)$ ولنبرهن أنها صحيحة من أجل مصفوفة رتبتها r.

بما أن $r \geqslant 1$ فعلى الأقل يختلف عنصر واحد a_{ij} من A عن الصفر. وبتحريك الصف i فوق الصفوف الـ $i-1$ التي تقع فوقه، ثم تحريك العمود j في المصفوفة الناتجة عبر الأعمدة الـ $j-1$ التي تقع إلى يساره، يمكننا، من خلال متتالية من التحويلات من النوع (I) ، جلب عنصر لا يساوي الصفر إلى الموضع (1,1) . وهكذا يمكننا الفرض بأن $a_{11} \neq 0$ ، لنقسم عناصر الصف الأول على a_{11} ، ثم لنطرح من الصف i جداء الصف الأول بـ a_{i1} $(i = 2, 3, \ldots, m)$ ، فيتحول العمود الأول إلى أصفار باستثناء الـ 1 الموجود في الصف الأول. وبطرح مضاعفات مناسبة للعمود الأول من الأعمدة الباقية (في حال وجودها) تصبح جميع عناصر الصف الأول باستثناء الأول منها أصفارًا. والمصفوفة الناتجة هي إذن من الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & a''_{m2} & \cdots & a''_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

إذا كان $m = 1$ أو $n = 1$ ، فلا تكون المصفوفة A_1 موجودة. وفيما عدا ذلك فإن رتبة A_1 هي بوضوح $r-1$. وإذا كان $r = 1$ فإن الاختزال المطلوب يكون قد استُكمل. وفيما عدا ذلك فإن A_1 يحوي، على الأقل، عنصرًا واحدًا a''_{ij} يختلف عن الصفر، ويمكننا أن نمضي بالنسبة لِـ A_1 فنطبق العمليات نفسها التي طبقناها على A. وبالفرض الاستقرائي يمكن اختزال A_1 إلى الشكل N بـ $r-1$ من المقادير 1 في القطر. وبما أن التحويلات الأوّلية المطبّقة على A_1 تؤثّر فقط في الصفوف الـ $m-1$ والأعمدة الـ $n-1$ الأخيرة، فمن الواضح أنها لا تغيِّر شيئًا من الاختزال الذي تمَّ من حينه، وهكذا فإن A تُختزل إلى الشكل N كما عرضناه في النظرية. وسنشير إلى N على أنه الشكل القانوني لِـ A تحت التحويلات الأوّلية.

تعريـف

نقول: إن المصفوفتين $\underset{m\times n}{A}$ و $\underset{m\times n}{B}$ متكافئتان إذا أمكن العبور من إحداهما إلى الأخرى بعدد منته من التحويلات الأوّلية.

ومن الواضح أنه إذا أمكن العبور من A إلى B بوساطة تحويلات أوّلية، فسيكون من الممكن أيضًا أن نعبر من B إلى A طالما أن لكل تحويل أولي تحويلاً معاكسًا.

وسنبرهن الآن النظرية التالية:

نظرية (١٢ - ٣)

الشرط اللازم والكافي لتكافؤ مصفوفتي A وB، عناصرهما من حقل $\mathcal{F}$، هو أن يكون لهما الرتبة نفسها.

ونستنتج ضرورة الشرط من حقيقة أن الرتبة لا تتغير عند تطبيق التحويلات الأوّلية. والكفـاية تتبـع من حقيقة أنه إذا كان لـ A وB الرتبة نفسها فيمكننا عندئذ اختزال كل منهما إلى الشكل القانوني N نفسه، وبالتالي فإنه يمكن تحويل كل منهما إلى الأخرى.

١٣ - مصفوفة فاندرموند Vandermonde

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أية أعداد مركبة فستعارف على أن المصفوفة

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{13.1}$$

هي مصفـوفة كوشي* Cauchy أو فاندرموند** Vandermonde. ومن الواضح أنه إذا تسـاوى أي زوج من المقـادير x، ولنقـل $x_i = x_j$، فسيكون في V صفّان متطابقان وبـالتـالي $|V| = 0$. ولـذلـك، واستنـادًا إلى نظرية التحليل إلى عوامـل في الجـبر

* Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

** Alexander Theophilet Vandermonde (1735-1796)

الابتـدائي، يكـون $|V|$، وهي كثـيرة حدود في $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قابلة للقسمة على أي عامـل خطّي من الشكـل $x_j - x_i$، $(i \neq j)$. وبـما أنـه يمكن اعتبـار المقـادير x كمتحولات مستقلة، فيكون $|V|$ بالتالي قابلاً للقسمة على جداء مثل هذه العوامل أي على:

$$\prod_{j>i}(x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)$$
$$(x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \qquad (13.2)$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$(x_n - x_{n-1}).$$

وهـكـذا يكـون $|V| = \Phi\,(x_1, \ldots, x_n) \prod_{j>i}(x_j - x_i)$، حيث Φ هي كثـيرة حدود في $x_1, x_2, \ldots, x_n$، أو عدد ثابت لا يسـاوي الصفـر. ومن الـواضـح أن الجداء الذي نحصل عليه بضرب الحدود الأولى في جميع الأقواس في (13.2) هو

$$x_2 x_3^2 x_4^3 \ldots x_n^{n-1}$$

وبـما أن هذا الحـد هو بدقـة حدّ القـطر الـرئيس في $|V|$، وأن كلاً من $|V|$ وكثـيرة الحدود في (13.2) هما من الدرجة $\frac{n(n-1)}{2}$، فيتضح أن Φ يجب أن تكون مساوية للواحد، بحيث تصبح العبارة في (13.2) هي قيمة $|V|$.

لنفـرض الآن أن r بالضبط من المقـادير x في (13.1) هي مقـادير مختلفة، وبدون أية خسـارة بالنسبـة لشمـولية المنـاقشـة، يمكننا أن نفترض أنها المقادير $x_1, x_2, \ldots, x_r$، وهكـذا يكـون كل من المقـادير الـ $n - r$ البـاقية، في حال وجودها، مساويًا لأحد المقادير الـ r هذه. وبـوسـاطـة التحـويلاتِ الأوّلية يمكن وضـع أصفار بدلاً من الصفوف الـ $n - r$ الأخـيرة. وبالتالي فإن رتبة V لا يمكن أن تتجاوز r. وفضلاً عن ذلك، وباعتبار أن المصفـوفـة المصغّـرة الأسـاسية V_1 ذات الرتبة r الواقعة في الزاوية العليا اليسرى من V هي في حدِّ ذاتهـا مصفـوفة فاندرموند (Vandermonde) بِـ r من المقادير x المتميزة فإن $|V_1| \neq 0$، وبالتالي تكون رتبة V مساوية تماما لِـ r.

ومنه نجد النظرية :

نظرية (١٣ - ١)

إذا كانت V مصفوفة فاندرموند (Vandermonde) في (13.1) فإن محدّد V معطى بالجداء المذكور في (13.2). وإذا كان عدد العناصر المختلفة بين $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو r ، فتكون V من الرتبة r.

وغالبًا ما نشير إلى عبارة $|V|$ المذكورة في (13.2) على أنها الدالة المتناوبة في $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، باعتبار أن مبادلة أي زوج من المقادير x يسبب تغير إشارة الدالة .

تمارين

حدِّد رتبة كل من المصفوفات التالية :

١) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ٦) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & -2 & 4 & 7 \\ -1 & 17 & -6 & 2 & 15 \\ 3 & 4 & -2 & 9 & 11 \end{bmatrix}$

٧) لتكن المصفوفتان $\underset{m\times n}{A}$ و $\underset{m\times n}{B}$ عناصرهما من حقل $\mathscr{F}$. إذا كانت r_1 و r_2 رتبتي A و B على الترتيب، فبيِّن أن رتبة $A + B$ لا يمكن أن تتجاوز $r_1 + r_2$.

٨) بيِّن أنه يمكن دائمًا اختزال مصفوفة مربعة $n \times n$ ، غير شاذة ، وعناصرها من حقل $\mathscr{F}$ ، إلى شكل قانوني I_n وذلك بتحويلات أوّلية مطبّقة على الصفوف فقط.

٩) لتكن A مصفوفة $m \times n$ عناصرها من حقل الأعداد المركبة. إذا كانت A من الرتبة r ، فبيِّن أن المصفوفة AA^* تحوي على الأقل محددًا مصغرًا أساسيًا واحدًا فيه r صفًّا ولا يساوي الصفر، وبالتالي فإن رتبة AA^* هي رتبة A نفسها.

١٠) بيِّن باستخدام النظرية (٩ ـ ٣) أن رتبة جداء مصفوفتين لا يمكن أن تتجاوز رتبة أي من العاملين.

١١) لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أعدادًا مختلفة من حقل $\mathscr{F}$ ، ولنرمز بِـ V_i للمصفوفة المربّعة $n \times n$ التي نحصل عليها بحذف العمود i من المصفوفة $n \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}.$$

والآن إذا كانت σ_i الدالة الأوّلية المتناظرة i في المقادير x : $\Sigma x_1 x_2 \ldots x_i$ ، فبيِّن أن

$$\sigma_i = \frac{|V_{n+1-i}|}{|V_{n+1}|}.$$

الفصل الرابع

مزيد من جبر المصفوفات

١٤ ـ معكوس مصفوفة غير شاذة

لتكن A مصفوفة مربّعة رتبتها n ، وعناصرها من حقل $\mathscr{F}$. فسنلغي الدليل ونكتب I_n ببساطة على الشكل I. وعندئذ :

$$I \cdot A = A \cdot I = A \tag{14.1}$$

وذلك من أجل أي مصفوفة مربّعة $\underset{n \times n}{A}$. وتسمى المصفوفة I المصفوفة الواحدية أو المصفوفة المحايدة، أو عامل التساوي *(idem - factor)*.

وإذا كان k أي عدد، فتدعى المصفوفة kI مصفوفة سُلَّمية أو عددًا سلميًّا فقط . [انظر العلاقات (3.1) ، (3.2) ، . . . ، (3.5) السابقة] .

لتكن المصفوفة المربّعة A غير الشاذة، أي $|A| \neq 0$ ، ولنعتبر المصفوفة :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{11}}{|A|} & \frac{\alpha_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{\alpha_{n1}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\alpha_{1n}}{|A|} & \frac{\alpha_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{\alpha_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}, \tag{14.2}$$

والعنصر في الصف i والعمود j هو $\frac{\alpha_{ji}}{|A|}$، حيث α_{ij} هو العامل المرافق لِـ a_{ij} في المحدّد $|A|$. ولدينا من خواص المحددات مباشرة (نظرية ٧ ـ ٨ و٧ ـ ١١) :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \tag{14.3}$$

وفضلاً عن ذلك، إذا كانت B مصفوفة مربّعة بحيث إن $AB = I$ ، وضربنا الطرفين من اليسار بِـ A^{-1} ، نجد $A^{-1}.AB = A^{-1}$ ، ولذا $B = A^{-1}$. وبصورة مماثلة إذا كان $BA = I$

فإن $B = A^{-1}$ أيضًا و تدعى المصفوفة A^{-1} في (14.2) معكوس (أو نظير أو مقلوب) المصفوفة غير الشاذة A.

ولم تُعرَّف قسمة المصفوفات حتى الآن. وتقدم النظرية التالية تعريفًا للقسمة عن اليمين أو عن اليسار.

نظريـة (١٤ - ١)

لتكن A وB مصفوفتين مربّعتين $n \times n$. و A غير شاذة. فتوجد مصفوفتان X وY وحيدتان بحيث إن $AX = B$ ، $YA = B$ ، وتُعطى هاتان المصفوفتان بالعلاقتين $X = A^{-1}B$ ، $Y = BA^{-1}$.

من الواضح أن $X = A^{-1}B$ هي حل للمعادلة $AX = B$. وفضلاً عن ذلك، إذا كان $AX_1 = B$ ، فعندئذ $AX = AX_1$. ومنه إذا ضربنا طرفي المعادلة عن اليسار بـ A^{-1} نجد $X = X_1$ ، أي أن الحل وحيد.

إذا كانت A شاذّة فلا توجد مصفوفة B بحيث إن $AB = I$. ذلك لأنه إذا أخذنا محدَّد كل من الطرفين فسنحصل على $|B| = 1$. 0 وهو مستحيل.

نظريـة (١٤ - ٢)

لا يوجد نظير (مقلوب أو معكوس) لمصفوفة شاذة A .

ولدينا أيضًا النظرية التالية التي يمكن التحقق منها بسهولة.

نظريـة (١٤ - ٣)

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_s$ مصفوفات مربّعة $n \times n$ غير شاذة، فعندئذ يكون الجداء

$$C = A_1 A_2 \cdots A_s$$

غير شاذ و

$$C^{-1} = A_s^{-1} A_{s-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1},$$

أي أن نظير جداء مصفوفات غير شاذة هو جداء المصفوفات الناتجة عن نظير كل منها ولكن بترتيب معكوس.

لنعرف الآن $A^{-s} = (A^{-1})^s$ و $A^0 = I$. فباستخدام قانون الدمج المتعلق بالضرب (نظرية ٤ ـ ٢) نجد:

نظريـة (١٤ ـ ٤)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$. فعندئذ تصحّ قوانين الرفع إلى قوة:

$$A^s \cdot A^t = A^{s+t}, \qquad (A^s)^t = A^{st} \qquad (14.4)$$

من أجل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة t, s ، وإذا كانت A غير شاذة فإن القوانين تصحّ من أجل جميع القوى الصحيحة، موجبة، سالبة، أو صفر.

١٥ ـ إنجاز التحويلات الأوّلية بضرب المصفوفات

لتكن A مصفوفة $m \times n$ و I_m مصفوفة محايدة مربّعة $m \times m$. فمن السهل عندئذ التحقق مما يلي:

(١) لتكن E_{ij} المصفوفة التي نحصل عليها من I_m بمبادلة الصفين i و j . فعندئذ تكون $E_{ij}A$ المصفوفة $m \times n$ التي نحصل عليها من A بمبادلة الصفين i و j من صفوفها.

(٢) لتكن K_i المصفوفة التي نحصل عليها من I_m بعد وضع k بدلاً من الواحد في الموضع (i, i) حيث $(k \neq 0)$. فعندئذ تكون K_iA المصفوفة التي نحصل عليها من A بعد ضرب كل عنصر من الصف i بـ k.

(٣) لتكن $S_{i+(k)j}$ المصفوفة التي نحصل عليها من I_m بعد وضع k بدلاً من 0 في الموضع (i, j). فعندئذ تكون المصفوفة $S_{i+(k)j}A$ هي المصفوفة الناتجة عن A بعد أن نضيف إلى الصف i جداء k بالصف j .

وينبغي ملاحظة أنه لكي ننجز تحويلاً أوّليًا معيّنًا على صفوف A ، نضرب A عن اليسار بمصفوفة مربّعة $m \times m$ حصلنا عليها بعد أن طبّقنا على صفوف I ، وبدقة،

التحويل الأوّلي نفسه الذي نريد تطبيقه على صفوف A . وسنشير إلى مصفوفات من النوع K_iE_{ij} ، و $S_{i+(k)j}$ كمصفوفات تحويل أولي للصفوف .

وبصورة مشابهة يمكننا إيجاد مصفوفات تحويل أوّلي للأعمدة بحيث إنّه عندما تُضرب مثل هذه المصفوفات عن اليمين بِـ A فإننا ننجز تحويلات أوّلية على أعمدة A. ونترك بيان ذلك كتمرين للطالب .

لتكن A مصفوفة $m \times n$ رتبتها r ، بعناصر من حقل $\mathscr{F}$. فنعلم من النظرية (١٢ ـ ٢) أنه يمكن اختزال A ، بوساطة التحويلات الأوّلية، إلى الصيغة القانونية :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (15.1)$$

إذا كانت $S_1, \ldots, S_k$ هي المصفوفات المربّعة $m \times m$ لتحويل الصفوف و $T_1, \ldots, T_l$ هي المصفوفات المربّعة $n \times n$ لتحويل الأعمدة التي وصلنا بوساطتها إلى الصيغة القانونية، فلدينا :

$$S_k \cdots S_1 A T_1 \cdots T_l = N. \qquad (15.2)$$

وإذا رمزنا بِـ P و Q على الترتيب للجدائين :

$$P = S_k \cdots S_1; \qquad Q = T_1 \cdots T_l,$$

فنجد :

$$PAQ = N, \qquad (15.3)$$

حيث إن P و Q مصفوفتان غير شاذتين وعناصرهما من حقل $\mathscr{F}$.

نظريـة (١٥ ـ ١)

لتكن A مصفوفة $m \times n$ رتبتها r وعناصرها من حقل $\mathscr{F}$. فتوجد مصفوفة غير شاذة $\underset{m\times m}{P}$ ومصفوفة غير شاذة $\underset{n\times n}{Q}$ ، عناصرهما من الحقل $\mathscr{F}$ ، بحيث إن $PAQ = N$ وحيث :

$$N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

والآن لتكن A غير شاذة، فبالاستناد إلى التمرين ٨ في فقرة ١٣، يمكن اختزال A من خلال تحويلات أوّلية للصفوف فقط (أو للأعمدة فقط) إلى الصيغة القانونية I.

وبالتالي:
$$S_k S_{k-1} \cdots S_2 S_1 A = I, \tag{15.4}$$
ومنه:
$$A = S_1^{-1} S_2^{-1} \cdots S_k^{-1}.$$

وبما أن معكوس مصفوفة تحويل أولي هو مصفوفة تحويل أوّلي، فلدينا:

نظريـة (١٥ - ٢)

يمكن التعبير عن أي مصفوفة غير شاذة بجداء مصفوفات تحويل أولي.

نتيجة (١٥ - ٣)

لا تتغير رتبة مصفوفة $A_{m \times n}$ بضربها من كِلَا الجانبين بمصفوفة غير شاذة.

ومن (15.4) لدينا
$$A^{-1} = S_k S_{k-1} \cdots S_2 S_1 I, \tag{15.5}$$
وهذا يعطي في الحال:

نظريـة (١٥ - ٤)

لتكن A مصفـوفـة غير شاذة. إذا طبقنـا على صفـوف I التحـويلات الأوّلية للصفـوف نفسهـا التي يمكنها اختزال A إلى الصيغة القانونية I، فإننا نحصل على A^{-1} (*)

توضيـح

احسب باستخدام النظرية (١٥ - ٤) معكوس المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 \\ 6 & 7 & 23 \end{bmatrix}.$$

(*) CF. A. A. Albert, "A Rule for Computing the Inverse Matrix." *Amer. Math. Monthly,* Vol. 48 (March 1941) pp. 198-99. CF. also H. T. Burgess, "On the Matrix Equation BX = *C*." *Monthly,* Vol. 23 (1916), pp. 152-155. See also R. V. Andree, *Monthly,* Vol. 58 (1951), pp. 87-92.

الحـل

نشكـل مصفوفة $\underset{3\times 6}{M}$ ، تتألف الأعمدة الثلاثة الأولى منها من المصفوفة A ، وتتألف الأعمدة الثلاثة الأخيرة من المصفوفة I:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 23 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ونطبّق على M تحويلات الصف الأوّلية التي تختزل المصفوفة في الأعمدة الثلاثة الأولى إلى I ، وستتحول عندئذ المصفوفة في الأعمدة الثلاثة الأخيرة إلى A^{-1} .

نضيف إلى الصف الثـاني من M ضعف الصف الأول، ونـطرح من الصف الثالث ستة أمثال الصف الأول. والمصفوفة الناتجة هي :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 35 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

وفي M_1 نضيف إلى الصف الأول جداء 3 – بالصف الثاني. ونضيف إلى الصف الثالث جداء 11 بالصف الثاني. فنحصل عندئذ على :

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

وفي M_2 نضيف إلى الصف الأول جداء 7/2 – بالصف الثالث، وإلى الصف الثاني جداء 3/2 بالصف الثالث. ونقسم عندئذ الصف الثالث على 2 فنجد :

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -61 & -83/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 26 & 35/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 11/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

ومنه نكتب :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -61 & -83/2 & -7/2 \\ 26 & 35/2 & 3/2 \\ 8 & 11/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

١٦ ـ استخدامات الصيغة القانونية

لتكن A مصفوفة $m \times n$ رتبتها r ، و B مصفوفة $n \times q$ ، ولنعتبر الجداء AB. فبالاستناد إلى النظرية (١٥ ـ ١) توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث إن :

$$A = P^{-1} N Q^{-1} \text{ وحيث } N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$AB = P^{-1}(NQ^{-1}B).$$

وبما أن P^{-1} غير شاذة فرتبة AB مساوية لرتبة $NQ^{-1}B$. وفضلاً عن ذلك، يتألف $N(Q^{-1}B)$ من الصفوف الـ r الأولى من $Q^{-1}B$ ، والصفوف الباقية، في حال وجودها، تتألف بكاملها من أصفار، ولذلك فإن رتبة $Q^{-1}B$ ، هي على الأكثر r. ومنه نستنتج أن رتبة AB لا يمكن أن تتجاوز رتبة A. وبصورة مشابهة فإن رتبة AB أصغر أو تساوي رتبة B. وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية :

نظريـة (١٦ ـ ١)

رتبة جداء مصفوفتين لا يمكن أن تتجاوز رتبة أي من عاملي الجداء .

وثانية لتكن A مصفوفة $m \times n$ رتبتها r. ولتكن X مصفوفة $n \times q$ $(q \geqslant n - r)$ ولنعتبر المعادلة :

$$AX = 0 \qquad (16.1)$$

لنضع $A = P^{-1} N Q^{-1}$ ، فنجد $P^{-1} N Q^{-1} X = 0$ ، ومنه وباعتبار P غير شاذة نجد :

$$N Q^{-1} X = 0$$

وتتحقق هذه العلاقة الأخيرة، وبالتالي (16.1) ، إذا، وفقط إذا، كانت الصفوف الـ r الأولى من $Q^{-1} X$ أصفارًا، والصفوف الـ $n - r$ الأخيرة كيفية، ومنه

تكـون رتبـة $Q^{-1}X$ وبـالتـالي رتبـة X نفسها أقل أو تساوي $n-r$ ، وفي الحقيقة، من أجـل $q \geqslant n-r$ ، يمكننـا دائمًا اختيار X بحيث تكون رتبته $n-r$ تمامًا. وعلى سبيل المثال؛ يمكن اختيار $Q^{-1}X$ بحيث يساوي $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{n-r} & 0 \end{bmatrix}$ وإذا رمزنا لهذه المصفوفة الأخيرة بِـ C ، فمن الواضح أن رتبة C ، وبالتالي رتبة $X = QC$ هي $n-r$.

نظريـة (١٦ ـ ٢)

إذا كانت A مصفـوفـة $m \times n$ رتبتها r ، وكانت X مصفوفة $n \times q$ بحيث إن $AX = 0$ ، فإن رتبة X لا يمكن أن تتجاوز $n-r$ ، وتوجد دائمًا مصفوفات X رتبتها $n-r$ بحيث إن $AX = 0$.

نتيجـة (١٦ ـ ٣)

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ رتبتها r ، فتوجد مصفوفة غير الصفر X بحيث إن $AX = 0$ إذا، وفقط إذا، كان $r < n$.

نتيجـة (١٦ ـ ٤)

إذا كانت A مصفـوفـة $m \times n$ فتـوجد دائمًا مصفوفة غير الصفر X بحيث إن $AX = 0$ إذا كان $m < n$.

١٧ ـ المصفوفة القرينة لمصفوفة مربّعة A

إذا كانت A مصفـوفـة مربّعة $n \times n$ وكان α_{ij} يرمز في عبارة $|A|$ للعامل المرافق لِـ a_{ij} ، فتدعى المصفوفة المربّعة التي يشكل α_{ji} عنصرها الواقع في الصف i والعمود j بالمصفـوفة القرينة لِـ A (ونرمز لها بِـ $adj.\ A$)، أي أنه إذا كان $A = (a_{ij})$ ، فعندئذ $adj.\ A = (\alpha_{ji})$.

وهكذا يكون

$$\text{adj. } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{17.1}$$

ومن التعريف في (14.2) لِـ A^{-1} معكوس مصفوفة غير شاذة A ، يتّضح مباشرة أنه من أجل A غير شاذة يكون :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(\text{adj. } A). \qquad (17.2)$$

وينبغي ملاحظة أنه بينما يوجد لكل مصفوفة مربّعة مصفوفة قرينة، فإنه يوجد معكوس لمصفوفة مربّعة غير شاذة فقط. وعلى أي حال فلدينا من الخواص الأساسية [نظرية (٧ ـ ٨) و(٧ ـ ١١)]:

$$A\cdot(\text{adj. } A) = (\text{adj. } A)\cdot A = |A|\cdot I; \qquad (17.3)$$

بحيث إنه إذا كانت A ، بصورة خاصة، شاذة فإن :

$$A\cdot(\text{adj. } A) = (\text{adj. } A)\cdot A = 0. \qquad (17.4)$$

ونبرهن الآن النظرية التالية :

نظريـة (١٧ ـ ١)

إذا كانت المصفوفة المربّعة $\underset{n\times n}{A}$ غير شاذة، فعندئذ تكون مصفوفتها القرينة غير شاذة و $|adj. A| = |A|^{n-1}$ ، وإذا كانت رتبة A أصغر من $n-1$ فإن $adj. A = 0$ ، أما إذا كانت رتبة A مساوية لِـ $n-1$ فإن رتبة $adj. A$ هي الواحد .

ونستنتج العبارة الأولى للنظرية من (17.3) مباشرة، وذلك بأخذ محدّدات كل من الطرفين، فنجد :

$$|A|\cdot|\text{adj. } A| = |A|^n.$$

ومنه باعتبار أن $|A| \neq 0$.

$$|\text{adj. } A| = |A|^{n-1}. \qquad (17.5)$$

وتنتـج العبـارة الثانية من حقيقة أنه إذا كانت رتبة A أقل من $n-1$ فإن كل $\alpha_{ij} = 0$ ، بحيث يكون $adj. A = 0$.

ولبرهان العبارة الأخيرة نلاحظ أن α_{ij} واحدة، على الأقل، ستختلف عن الصفر باعتبار أن رتبة A هي $n-1$ ، وهذا يعني أن رتبة $adj.\,A$ هي على الأقل واحد. وفضلاً عن ذلك، وبالاستفادة من (17.4) نستنتج من النظرية (١٦ ـ ٢) أن رتبة $adj.\,A$ هي على الأكثر واحد. ولذلك فإن الرتبة يجب أن تساوي الواحد بالضبط.

ونبرهن الآن النظرية التالية:

نظريـة (١٧ ـ ٢)

لتكن M مصفـوفة مصغرة مربّعة $m \times m$ تقع في الصفوف $k_1, k_2, \ldots, k_m$ وفي الأعمـدة $l_1, l_2, \ldots, l_m$ من المصفوفة المربّعة $\underset{n\times n}{A}$ ، ولتكن N المصفوفة المصغّرة المربّعة $m \times m$ الواقعة في الصفوف $k_1, k_2, \ldots, k_m$ والأعمدة $l_1, l_2, \ldots, l_m$ من $adj.\,A$. فعندئذ

$$|N| = |A|^{m-1} \,.\, [\text{المتمم الجبري لِـ } |M|] \qquad (17.6)$$

ونبرهن مبدئيًا النظرية من أجل A غير شاذة. لنفرض أولاً أن M تقبع في الزاوية العليا اليسرى من A ، فنجد من العلاقة بين المصفوفات:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{m1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1m} & \cdots & \alpha_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{1m+1} & \cdots & \alpha_{mm+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{mn} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & \cdots & 0 & a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & |A| & a_{mm+1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nm+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

وبعد أخذ محدّد كل من الطرفين والنشر وفقًا لنظرية لابلاس:

$$|A| \,.\, |N| = |A|^m \,.\, [\text{المتمم الجبري لِـ } |M|],$$

ومنه، وباعتبار $|A| \neq 0$ ، نستنتج (17.6).

لنفرض الآن أن M تقع في الصفوف $k_1, k_2, \ldots, k_m$ والأعمدة $l_1, l_2, \ldots, l_m$ من A. فيمكننا دون التأثير في قيمة $|M|$ أو متممه العادي، سحب صفوف وأعمدة A بحيث تقع M في الزاوية العليا اليسرى. وإذا رمزنا بِـ B للمصفوفة الناتجة نجد:

$$|B| = (-1)^q |A|, \tag{17.7}$$

و

$$|M| \text{ المتمم الجبري لِـ } = (-1)^q (|M| \text{ متمم}), \tag{17.8}$$

حيث

$$q = k_1 + \cdots + k_m + l_1 + \cdots + l_m.$$

والعوامل المرافقة في B تساوي $(-1)^q\alpha_{ji}$ باعتبار أن مبادلة صفين متجاورين أو عمودين متجاورين يغير إشارة كل من العوامل المرافقة. ولكننا نحصل على $adj.\ B$ بسحب أعمدة وصفوف $adj.\ A$ بالطريقة نفسها تمامًا التي سحبنا فيها أعمدة وصفوف A ثم إلحاق العامل $(-1)^q$ بكل عنصر. لنرمز الآن بِـ N_1 للمصفوفة المربّعة $m \times m$ الواقعة في الزاوية العليا اليسرى من $adj.\ B$، فيمكن كتابة $N_1 = (-1)^q N$ بحيث نجد:

$$|N_1| = (-1)^{qm} |N| = |B|^{m-1} [|M| \text{ متمم}],$$

ومنه

$$(-1)^{qm} |N| = |A|^{m-1} (-1)^{q(m-1)} [|M| \text{ متمم}],$$

أو

$$|N| = |A|^{m-1} [(-1^q) (|M| \text{ متمم})] = |A|^{m-1} [|M| \text{ المتمم الجبري لِـ }]$$

وهكذا نكون قد برهنا النظرية من أجل A غير شاذة.

لنفرض الآن أن A شاذة. إذا كان $m > 1$ فينعدم الطرف الأيمن من (17.6) باعتبار أنه يحوي العامل $|A|$، بينما $|N| = 0$ طالما أن رتبة $adj.\ A$ أصغر أو يساوي 1.

ومن أجل $m = 1$ تصبح (17.6) على الشكل:

$$\alpha_{kl} = (|A|)^0 [a_{kl} \text{ المتمم الجبري لِـ }]$$

وهذا صحيح بالتعريف إذا اتفقنا على أن $|A|^0 = 1$.

وهكذا نكون قد برهنا النظرية (١٧ ـ ٢) في جميع الحالات.

وتوجد حالات خاصة من النظرية السابقة لها أهمية خاصة. فلنفرض أولاً أن $m = n - 1$ ولتكن M المصفوفة التي نحصل عليها من A بحذف الصف i والعمود j. والمتمم الجبري لِـ $|M|$ عندئذ هو $(-1)^{i+j}a_{ij}$. N، وهو المصفوفة التي نحصل عليها من $adj. A$ بعد حذف الصف j والعمود i.

ومنه $|N| = (-1)^{i+j}\,\widetilde{\alpha}_{ij}$ حيث $\widetilde{\alpha}_{ij}$ هو العامل المرافق لِـ α_{ij} في $|adj. A|$. وهكذا نجد

نتيجة (١٧ - ٣)

إذا كانت $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ وكان $\widetilde{\alpha}_{ij}$ العامل المرافق لِـ α_{ij} في $|adj. A|$، فعندئذ

$$\tilde{\alpha}_{ij} = |A|^{n-2}\, a_{ij}.$$

والآن لتكن M المصفوفة المربّعة 2×2 الواقعة في الصفّين i وk والعمودين j وl من A. فتُنتج النظرية في هذه الحالة:

نتيجة (١٧ - ٤)

إذا كانت N المصفوفة المصغّرة ذات الـ $(n-2)$ صفًا التي نحصل عليها من المصفوفة المربّعة $\underset{n\times n}{A}$ بعد حذف الصفّين i وk والعمودين j وl، فعندئذ

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kj} \\ \alpha_{il} & \alpha_{kl} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j+k+l}\, |N| \cdot |A|.$$

تمارين

احسب المعكوس والمصفوفة القرينة لكل من المصفوفات التالية:

١) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ ٦) $\begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 \\ -6 & 7 & -6 \\ -2 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ٨) $\begin{bmatrix} k & c & -b \\ -c & k & a \\ b & -a & k \end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ١٠) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

١١) احسب المصفوفة القرينة لِـ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

١٢) إذا كانت A مصفوفة مربعة غير شاذة عناصرها من الحقل المركب، فبيِّن أن

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'; \quad (\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}; \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

١٣) بيِّن أنه يمكن كتابة المصفوفة $\underset{m\times n}{A}$ ذات الرتبة r كمجموع r من المصفوفات رتبة كل منها الواحد.

١٤) بيِّن أن المصفوفة القرينة لجداء مصفوفتين مربّعتين يساوي جداء المصفوفتين القرينتين بترتيب معاكس **إرشاد**: [استخدم الفقرة ٩].

١٥) إذا كانت A هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ فبيِّن أن $adj.\ A = \begin{bmatrix} -52 & 52 & -23 \\ 22 & -8 & -38 \\ 7 & -68 & 37 \end{bmatrix}$.

وإذا كانت B هي المصفوفة التي نحصل عليها من A بحذف الصفين الأول والثاني فأوجد بالحدس $Adj\ B$.

الفصل الخامس

نظرية
الارتباط الخطّي

١٨ ـ مفهوم الارتباط الخطّي

نقصد بمتّجه X ذي n بُعدًا فوق حقل $\mathscr{F}$ ، مجموعة مرتبة من n من عناصر $\mathscr{F}$ ، وهكذا نكتب:

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

حيث تنتمي المقادير x إلى $\mathscr{F}$. ويمكن أن يكون المتّجه X إما متّجه صف، ونشير إليه بأقواس مستديرة، أو متّجه عمود، ونشير إليه بأقواس مربّعة، $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. وسنجد من المريح أن نعتبر متّجه الصف كمصفوفة $1 \times n$ ، ومتجه العمود كمصفوفة $n \times 1$. ومنه، وإلى الحد الذي يتعلق بالجمع والطرح أو الضرب بأعداد سُلَّمية، فإن المتّجهات تنصاع للقوانين المذكورة في الفقرة ٣ .

لنعتبر الآن m من المتّجهات ذات الـ n بُعدًا فوق الحقل $\mathscr{F}$

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}), \\ X_2 &= (x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_m &= (x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mn}). \end{aligned} \tag{18.1}$$

فيُقال إن هذه المتّجهات مرتبطة خطيًّا بالنسبة إلى $\mathscr{F}$ إذا وُجدت m من العناصر $k_1, k_2, \ldots, k_m$ من $\mathscr{F}$ ، ليست جميعها أصفارًا، بحيث إن:

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m = 0 \tag{18.2}$$

وحيث $\underset{m}{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ هو المتّجه الصفر. وإذا لم توجد مثل هذه المجموعة من العناصر k ، أي إذا كانت العلاقة (18.2) تتضمن كون $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$ فنقول عندئذ إن المتّجهات الـ m مستقلة خطيًّا.

وعلى سبيل المثال، إذا كان $X_1 = (2, -1, 3)$ ، $X_2 = (7, 3, -5)$ و $X_3 = (8, 9, -19)$ ، فعندئذ $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ ، وهذا يعني أن المتّجهات الثلاثة المعطاة بمركبات من حقل الأعداد النسبية، هي متّجهات مرتبطة خطيًّا وعلى العكس فإن المتّجهات الثلاثة $V_1 = (1, 0, 0, 0)$ ، $V_2 = (0, 1, 0, 0)$ و $V_3 = (0, 0, 1, 0)$ هي متّجهات مستقلة خطيًّا، ذلك لأن $k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3 = (k_1, k_2, k_3, 0)$ ، وهذا المتّجه الأخير هو المتّجه الصفر إذا، وفقط إذا، كان $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

تعريف

إذا كان لدينا m من كثيرات الحدود $f_1, f_2, \ldots, f_m$ بمتغيّر واحد أو أكثر وبمعاملات من حقل $\mathscr{F}$ ، فيقال: إن كثيرات الحدود الـ m مرتبطة خطّيًّا بالنسبة لـ $\mathscr{F}$. إذا كان يوجد m من عناصر $\mathscr{F}$ ، ولنقل $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ، ليست كلها أصفارًا، بحيث إن:

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_mf_m \equiv 0. \tag{18.3}$$

وإذا لم توجد مثل هذه المجموعة من المقادير k ، نقول إن كثيرات الحدود الـ m مستقلة خطيًّا.

ومن الواضح أن m من كثيرات الحدود تكون مستقلة خطيًّا إذا، وفقط إذا، كانت المتّجهات الـ m التي تتألف مركباتها من معاملات كثيرات الحدود مستقلة خطيًّا. وعلى سبيل المثال، فإن الدوال الخطّية الثلاث:

$$\begin{aligned} l_1 &= 2x - y + 3, \\ l_2 &= 7x + 3y - 5, \\ l_3 &= 8x + 9y - 19, \end{aligned}$$

التي تشكّـل معاملاتها مركّبات المتجهات X_1, X_2, X_3 أعلاه، هي دوال مرتبطة خطيًّا. وبتفسيرها هندسيًّا نقول: إن هذا يعني أن الخطوط الثلاثة $l_1 = 0$ ، $l_2 = 0$ ، $l_3 = 0$ غير متوازية، أو إن خطًّا واحدًا يمر عبر نقطة تقاطع الخطّين الآخرين.

ونعرض الآن ونبرهن:

نظريـة (١٨ - ١)

إن وجدت بين المتّجهات الـ m, $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *مجموعة جزئية من* $s < m$ *من المتّجهات المرتبطة خطيًّا، فإن المجموعة بكاملها المؤلفة من* m *متّجهًا تكون مرتبطة خطيًّا.*

ولتسهيل الرموز، يمكننا، دون أية خسارة في شمولية المعالجة، الافتراض بأن المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_s$ مرتبطة خطيًّا. ومنه يوجد s من الأعداد $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ، ليست جميعها أصفارًا، بحيث إن:

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s = 0. \qquad (18.3)$$

ولكن هذه هي بدقة المعادلة (18.2) بعد وضع أصفار بدلاً من $k_{s+1}, \ldots, k_m$. وهذا يثبت النظرية.

تعريـف

نقول إنه يمكن التعبير عن المتّجه Y *كتركيب خطّي في المتّجهات* $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *إذا كانت توجد عناصر* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *من* $\mathscr{F}$ *بحيث إن:*

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m.$$

نظريـة (١٨ - ٢)

إذا كانت m *من المتّجهات مرتبطة خطيًّا، فمن الممكن دائمًا التعبير عن واحد ما منها كتركيب خطّي في المتّجهات الباقية.*

ذلك لأنه في (18.2) سابقًا، وباعتبار أن المقادير k ليست جميعها أصفارًا، يمكننا الافتراض بأن $k_i \neq 0$. وعندئذ يمكننا نقل الحد k_iX_i وقسمة الطرفين على k_i لنجد:

$$X_i = c_1X_1 + \cdots + c_{i-1}X_{i-1} + c_{i+1}X_{i+1} + \cdots + c_mX_m, \qquad (18.4)$$

حيث $c_j = \dfrac{-k_j}{k_i}$. ولدينا أيضًا:

نظريـة (١٨ - ٣)

إذا كانت المتّجهات $X_1, X_2, \dots, X_m$ مستقلة خطيًّا، بينما المجموعة من $m + 1$ من المـتّـجـهـات، $X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}$ مرتـبـطة خطيًّا، فعندئذ يمكن التعبير عن X_{m+1} كتركيب خطّي في $X_1, X_2, \dots, X_m$.

توجد علاقة من الشكل:

$$k_1X_1 + \cdots + k_mX_m + k_{m+1}X_{m+1} = 0 \qquad (18.5)$$

لا تكـون جميع المقـادير k فيهـا أصفـارًا. والآن $k_{m+1} \neq 0$، ذلـك لأنـه إذا كان $k_{m+1} = 0$ فإن المقـادير $k_1, k_2, \dots, k_m$ ليست جميعهـا أصفـارًا، وبـالاستنـاد إلى (18.5) يمكن عنـدئـذ الاستنتاج بأن $X_1, \dots, X_m$ مرتبطة خطيًّا مما يناقض الفرض. وبـما أن $k_{m+1} \neq 0$ فيمكننـا بنقـل $k_{m+1}X_{m+1}$ وقسمـة الـطرفـين على k_{m+1} التعبير عن X_{m+1} كتركيب خطي في $X_1, \dots, X_m$.

تعريـف

تدعى المصفـوفـة $M_{m \times n}$ في (18.1)، التي تتـألف صفوفها المتتالية من مركبات المتّجهات $X_1, \dots, X_m$، مصفوفة المتّجهات.

وبدلالة المفاهيم التي عرفناها لتوّنا نعرض ونبرهن:

نظريـة (١٨ - ٤)

الشرط اللازم والكافي لتكون الـ m من المتّجهات $X_1, \dots, X_m$، وكل منها ذو n بُعدًا، مرتبطة خطيًّا هو أن تكون رتبة مصفوفة المتّجهات أصغر من m.

لبرهـان هذه النظرية يمكننا افتراض أن $m \leqslant n$. ذلك لأنه إذا كان $m > n$، فبـدون التـأثير في مسألة الاستقلال أو عدم الاستقلال الخطّي، أو بدون تغيير رتبة

المصفوفة M ، يمكننا أن نضيف لكل متّجه $n - m$ من المركبات جميعها أصفارًا، فنجد

$$X_i = (x_{i1}, \cdots, x_{in}, 0, \cdots, 0).$$

لنفرض أولاً أن المتّجهات الـ m مرتبطة خطيًا. فعندئذ وبالاستناد إلى النظرية (١٨ ـ ٢) يمكن التعبير عن أحدها، ولنقل X_i ، كتركيب خطّي في المتّجهات الأخرى، بحيث تصبح علاقة من الشكل (18.4). لنطرح الآن من الصف i في المصفوفة M جداء الصف الأول بـ c_1 ، جداء الصف $i - 1$ بـ c_{i-1} ، جداء الصف $i + 1$ بـ c_{i+1} ، . . . إلخ . فيتألف الصف i من المصفوفة الناتجة عندئذ من الأصفار فقط . وبما أن المصفوفة فيها m صفًا فقط فمن الواضح أن رتبتها أقل من m.

وعلى العكس، لتكن رتبة M مساوية لِـ $r < m$. فعندئذ تحوي M على الأقل مصغرًا واحدًا فيه r من الصفوف وغير منعدم، في حين تنعدم كل المصغّرات ذات الـ $(r + 1)$ صفًّا. وبدون تغيير رتبة M ، ودون التأثير في الاستقلال أو عدم الاستقلال الخطّي للمتّجهات، يمكننا، عند الضرورة، تغيير رتبة المتّجهات والمركبات ضمن كل متّجه بحيث تقع المصفوفة المربّعة $r \times r$ ، التي يساوي محدّدها كمية d غير الصفر، في الزاوية العليا اليسرى من M. لنعتبر الآن المتّجهات الـ $X_1, X_2, \ldots, X_r$ الأولى وأيًّا من المتّجهات الـ $m - r$ الباقية، ولنقُل X_s. ولنرمز بِـ Δ لمحدّد المصفوفة المربّعة $(r + 1) \times (r + 1)$:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \cdots & x_{1r} & x_{1r+1} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & d \neq 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r1} & \cdots & x_{rr} & x_{rr+1} & \cdots & x_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{s1} & \cdots & x_{sr} & x_{sr+1} & \cdots & x_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right] \qquad (18.6)$$

التي تتألّف من الصفوف الـ r الأولى والصف s ومن الأعمدة الـ $r + 1$ الأولى من المصفوفة M في (18.6). وأيضًا لنرمز بِـ $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1}$ للعوامل المرافقة لعناصر العمود $r + 1$ من Δ . فمن الواضح أن $k_{r+1} = d \neq 0$. ولدينا عندئذ بالاستناد إلى النظرية (٧ـ١١):

$$\sum_{i=1}^{r} k_i x_{ij} + k_{r+1} x_{sj} = 0, \qquad (j = 1, \cdots, r). \qquad (18.7)$$

ولدينا أيضًا بالاستناد إلى النظرية (٧ ـ ٨):

$$\sum_{i=1}^{r} k_i x_{ir+1} + k_{r+1} x_{sr+1} = \Delta = 0. \qquad (18.8)$$

إذا كان $n > r + 1$ ، لنرمز بـ Δ_t لمحدّد المصفوفة المربّعة $(r + 1) \times (r + 1)$ التي تتطابق أعمدتها الـ r الأولى مع تلك الموجودة في Δ ولكن عمودها الـ $(r + 1)$ هو العمود t $(r + 1 < t \leqslant n)$ من M. وبما أن العوامل المرافقة لعناصر العمود الأخير من Δ_t هي، على وجه الدقة، الأعداد $k_1, k_2, ..., k_{r+1}$ في (18.7)؛ فسنجد عند نشر Δ_t وفقًا للعمود الأخير:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i x_{it} + k_{r+1} x_{st} = 0 \qquad (t = r + 2, \cdots, n). \qquad (18.9)$$

ومن الواضح، وفقًا لِـ (18.7) و (18.8)، أن (18.9) تصح من أجل $t = 1, 2, ..., n$.
ومنه:

$$k_1 X_1 + \cdots + k_r X_r + k_{r+1} X_s = 0, \qquad (18.10)$$

وبالتالي، وبما أن $k_{r+1} \neq 0$ ، فنستنتج أن المتّجهات $X_1, ..., X_r, X_s$ مرتبطة خطيًا. وبالاستناد إلى النظرية (١٨ ـ ١) نستنتج أن المجموعة $X_1, ..., X_m$ من m من المتجهات هي مجموعة مرتبطة خطيًا، وهو المطلوب.

وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية الأكثر تحديدًا.

نظريـة (١٨ ـ ٥)

لتكن $X_1, ..., X_m$ متّجهات ذات n بعدًا فوق الحقل $\mathscr{F}$. إذا كانت رتبة المصفوفة في (18.1) هي $r < m$ ؛ فيوجد من بين المتّجهات الـ m ، r من المتّجهات المستقلة خطيًا، في حين يمكن التعبير عن المتّجهات الـ $m - r$ الباقية كتركيب خطّي في المتّجهات الـ r تلك.

ومثلها مثل المتّجهات الـ r المذكورة في النظرية، يمكن أخذ أي r من المتّجهات المستقلة خطيًا من بين المتّجهات الـ m ، أي r من المتجهات التي تكون رتبة مصفوفتها r.

ونحصل مباشرةً على النتيجة التالية:

نتيجـة (١٨ ـ ٦)

تكـون المتّجهـات $X_1, X_2, ..., X_m$ ذات الـ n بُعـدًا فوق الحقـل $\mathscr{F}$ ، على الدوام، مرتبطة خطيًا إذا كان $m > n$.

١٩ ـ فضاءات المتّجهات الخطّية

لتكن ... $X_1, X_2, X_3,$ متّجهـات ذات n بعـدًا فوق حقـل $\mathscr{F}$. فتحقق هذه المتّجهـات عندئذ الشروط المذكورة في المعادلات (3.5) ,... ,(3.1). لنفرض بالإضافة إلى ذلك أن هذه المجموعة Γ من المتّجهات تحقق الشرطين التاليين:

(١) إذا كان X_1 ينتمي إلى Γ وكان c أي عنصر من $\mathscr{F}$ ، فعندئذ ينتمي cX_1 إلى Γ .

(٢) إذا كان X_i وX_j أي متّجهـين من Γ ، فعنـدئـذ يكـون $X_i + X_j$ متّجهًـا من Γ . فيقال: إن مثل هذه المجموعة من المتّجهات تشكّل فضاء متّجهات خطّيًا فوق $\mathscr{F}$. ومن الواضح أن المجموعة المؤلفة من المتّجه صفر $0 = (0, 0, ..., 0)$ فقط تحقق الشروط السابقة، فهي إذن مثال على فضاء متّجهات خطّي.

نظريـة (١٩ ـ ١)

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_m$ متّجهات فوق $\mathscr{F}$ ، فإن المجموعة Γ المؤلفة من كل التراكيب الخطّية $c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_mX_m$ ، حيث تتغير المقادير c فوق الحقل $\mathscr{F}$ ، تشكّل فضاء متّجهات خطيًا فوق $\mathscr{F}$.

ذلـك لأنـه إذا كان $Y = \sum_{i=1}^{m} c_i X_i$ ، فعنـدئـذ يكـون $cY = \sum_{i=1}^{m} (cc_i) X_i$ أيضًـا تركيبًـا خطيًا في $X_1, ..., X_m$ بمعـامـلات من $\mathscr{F}$. وبـالإضـافة إلى ذلك، إذا كان $Z = \sum k_i X_i$ ينتمي إلى Γ فعندئذ ينتمي $Y + Z = \sum (c_i + k_i) X_i$ أيضًا إلى Γ .

ويُقال إن مجموعة المتّجهات $X_1, ..., X_n$ تولّد فضاء المتّجهات الخطّي Γ .

وسنبرهن الآن النظرية المهمة التالية:

نظريـة (١٩ ـ ٢)

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_m$ متّجهـات ذات n بُعـدًا فوق حقل $\mathscr{F}$ ، ولنرمز بـ Γ لفضاء المتّجهات المتولد عن هذه المتّجهات الـ m. إذا كانت رتبة مصفوفة هذه المتّجهات M مساوية لِـ r ، فيوجد من بين المتّجهات X هذه، r من المتّجهات المستقلة خطيًا، بحيث يمكن التعبير، وبصورة وحيدة، عن كل متّجه في Γ كتركيب خطّي في المتّجهات الـ r هذه.

قبل كل شيء نستنتج من النظرية (١٨ ـ ٥) أنه توجد من بين الـ m متّجهًا r من المتّجهات المستقلة خطيًا حيث $r \leqslant m$ ، وسنرمز لهذه المتّجهات بِـ $X_1, \ldots, X_r$ ، وبحيث يمكن التعبير عن أي من المتّجهات الـ $m-r$ الباقية (في حال وجودها) كتركيب خطّي في $X_1, X_2, \ldots, X_r$. وهكذا نكتب:

$$\begin{array}{c} X_{r+1} = c_{r+11}X_1 + \cdots + c_{r+1r}X_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ X_m = c_{m1}X_1 + \cdots + c_{mr}X_r \end{array} \tag{19.1}$$

حيث العناصر c_{ij} هي عناصر من $\mathscr{F}$.

والآن يمكن كتابة أي متّجه Y من Γ على الشكل:

$$Y = k_1X_1 + \cdots + k_rX_r + k_{r+1}X_{r+1} + \cdots + k_mX_m.$$

وإذا بدّلنا في هذه المعادلة الأخيرة كلاً من $X_{r+1}, \ldots, X_m$ بعبارتها من (19.1) ، نحصل على:

$$Y = k_1'X_1 + k_2'X_2 + \cdots + k_r'X_r = \sum_{j=1}^{r} k_j', X_j, \tag{19.2}$$

حيث

$$k_j' = k_j + \sum_{i=r+1}^{m} k_ic_{ij} \qquad (j = 1, 2, \cdots, r).$$

وفي حال وجود عبارة ثانية لِـ Y كتركيب خطّي في $X_1, \ldots, X_r$:

$$Y = k_1''X_1 + k_2''X_2 + \cdots + k_r''X_r, \tag{19.3}$$

فيجب أن نحصل، لدى طرح (19.3) من (19.2) على:

$$(k_1' - k_1'')X_1 + (k_2' - k_2'')X_2 + \cdots + (k_r' - k_r'')X_r = 0,$$

ومنه، وباعتبار أن $X_1, X_2, \ldots, X_r$ مستقلة خطيًا، نجد:

$$k_1' - k_1'' = 0, \cdots, k_r' - k_r'' = 0$$

أي أن

$$k_i'' = k_i' \quad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

وبالتالي فإن عبارة Y كتركيب خطّي في $X_1, X_2, \ldots, X_r$ هي عبارة وحيدة. وهو المطلوب.

وسندعو مثل هذه المجموعة من المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_r$ أساسًا لفضاء المتّجهات الخطّي Γ.

وأخيرًا نبرهن:

نظرية (١٩ - ٣)

ليكن Γ فضاء متّجهات خطيًّا فوق $\mathcal{F}$ متولدًا عن m من المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_m$، ذوات الأبعاد n، والمعرفة فوق $\mathcal{F}$. إذا كانت رتبة المصفوفة في (18.1) المؤلفة من المتّجهات الـ m، مساوية لـ r، فإن أية مجموعة من $(r + 1)$ من المتّجهات في Γ تكون مرتبطة خطيًّا.

لبرهان هذه النظرية، لنرمز بـ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{r+1}$ لأي $r + 1$ من المتّجهات في Γ، ولنرمز بـ $N_{(r+1)\times n}$ لمصفوفة هذه المتّجهات. أي أن:

$$N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{r+1} \end{bmatrix}$$

هي المصفوفة التي يتألف صفها الـ i من مركبات المتّجه Y_i. ولبرهان هذه النظرية، نقول: إنه بالاستناد إلى النظرية (١٨ - ٤)، يتوجب علينا فقط أن نبرهن أن رتبة N أقل من $r + 1$.

لنرمز بـ W للمصفوفة $(2r + 1)\times n$ التي نحصل عليها بأن نضم r من متّجهات الصف الأخرى $X_1, \ldots, X_r$ التي تشكل أساسًا لفضاء المتّجهات Γ. ومن الواضح أن رتبة N لا يمكن أن تتجاوز رتبة W.

وبالاستناد إلى النظرية (١٩ - ٢) يمكن التعبير عن كل من المتّجهات Y كتركيب خطّي في $X_1, X_2, \ldots, X_r$. ومنه إذا طرحنا من كل من الـ $r + 1$ صفًّا الأولى في W جداء أعداد مناسبة بالصفوف الـ r الأخيرة نجعل الصفوف الـ $r + 1$ الأولى أصفارًا. وهكذا نجد أن رتبة W، وبالتالي N، لا يمكن أن تتجاوز r، وهو المطلوب.

تعريـف

لتكن $X_1, \ldots, X_m$ متّجهات ذات n بُعدًا فوق حقل $\mathscr{F}$. إذا كانت رتبة مصفوفة المتّجهات M في (18.1) هي r ، فسندعو r بُعد فضاء المتّجهات المتولّد عن المتّجهات $X_1, \ldots, X_m$ ، كما سنرمز لفضاء المتّجهات هذا بـ Γ_r .

ونستنتج من هذا التعريف ومن النظريتين (١٨ ـ ٤) و(١٩ ـ ٣) أن بُعد فضاء متّجهات خطّي هو بالضبط أكبر عدد من المتّجهات المستقلة خطيًّا في هذا الفضاء.

ومن الواضح أن مجموعة كل المتّجهات ذات البعد n فوق حقل $\mathscr{F}$ تشكّل فضاء متّجهـات خطيًّا فوق $\mathscr{F}$. ويمكننا بسهولة إيجاد n من مثل هذه المتّجهات المستقلة خطيًّا، وعـلى سبيل المثـال نذكـر المتّجهـات الـ n التـالية: $V_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ ، $V_2 = (0, 1, 0, \ldots, 1)$ ، $V_n = (0, 0, \ldots, 1)$ ، حيث يحوي V_i المقـدار 1 كمركّبته الـ i وأصفارًا من أجل المركّبات الأخرى. وأيضًا المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، التي تكون مركّبـاتهـا بحيث إن محدّد المصفوفة في (18.6) مختلف عن الصفر، هي وفقًا للنظرية (١٨ ـ ٥)، مستقلة خطيًّا، في حين تكون أي مجموعة من $(n + 1)$ من المتّجهات، ووفقًا للطريقة نفسها، مرتبطة خطيًّا.

وهكذا نجد النظرية:

نظريـة (١٩ ـ ٤)

تشكّل مجموعة كل المتّجهات ذات الـ n بعدًا فوق حقل $\mathscr{F}$ ، فضاء متّجهات خطيًّا Γ_n بُعـده n. ويمكن أن نختـار أية مجموعة من n من المتجهات المستقلة خطيًّا $X_1, X_2, \ldots, X_n$ من Γ_n كأساس لهذا الفضاء.

تماريــن

لتكن المجموعات التالية من المتّجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية. حدِّد أساسًا لفضاء المتّجهات الخطّي المتولّد عن كل مجموعة.

١) $(1, 2, 3, 4)$ ، $(4, 3, 2, 1)$ ، $(1, 1, 1, 1)$

٢) $(0, 1, 2)$ ، $(-1, 0, 3)$ ، $(-2, -3, 0)$

٣) $(-5, 11, 7, 3, -2)$ ، $(7, 2, -4, 6, 3)$ ، $(2, -1, 5, 11, 16)$

٤) $(1, 4, 9, 16)$ ، $(1, 1, 1, 1)$ ، $(-3, 3, 13, 32)$

٥) $(0, -3, 2, 1)$ ، $(3, 0, 1, 1)$ ، $(-2, -1, 0, 1)$ ، $(-1, -1, -1, 0)$

٦) $(0, -3, -2, 1)$ ، $(3, 0, 1, 1)$ ، $(2, -1, 0, 1)$ ، $(-1, -1, -1, 0)$

من بين المجموعات التالية معتبرة كمتّجهات، حدِّد تلك التي تشكّل فضاء متّجهات خطيًّا وأوجد أساسًا لكل فضاء خطّي:

٧) مجموعة كل المصفوفات 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فوق حقل الأعداد الحقيقية.

٨) مجموعة كل المصفوفات 3×3 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، حيث a ، b وc أعداد حقيقية.

٩) مجموعة كل كثيرات الحدود من درجة أصغر أو تساوي 3 (في متغيّر حقيقي x) وبمعاملات حقيقية

$$ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

١٠) مجموعة كل الدوال الخطّية الحقيقية بمتغيّرات حقيقية x ، y ، z

$$ax + by + cz + d.$$

١١) مجموعة كل كثيرات الحدود من النوع

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d$$

بمعاملات حقيقية.



الفصل السادس

نُظُم المعادلات الخطِّية

٢٠ ـ مقدمة

لنعتبر نظامًا من m من المعادلات الخطّية في المتغيّرات (المتحولّات) $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= k_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= k_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= k_m, \end{aligned} \tag{20.1}$$

حيث إن المقادير a_{ij} و k_i هي عناصر معروفة من حقل ما $\mathscr{F}$. وإذا رمزنا بـ $A = (a_{ij})$ لمصفـوفة المعاملات $m \times n$ ، وبـ X و K لمصفوفتين كل منهما بعمود واحد أو مُتَّجهي عمود، فيمكن كتابة المعادلة (20.1) بلغة المصفوفات كما يلي:

$$AX = K, \tag{20.2}$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}. \tag{20.3}$$

ولسهـولـة الكتـابـة، سنـرمـز لمتّجه العمود أو المصفوفة $\underset{n \times 1}{X}$ في (20.3) بالرمز $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ، حيث تشـير الأقواس المربّعة لمتّجه العمود. و X' هو عندئذ متّجه الصف $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، ونشير له بأقواس مستديرة، ومسألتنا هي أن نحدد الشروط اللازمة والكافية بالنسبة للمصفوفتين A و K لكي يكون ممكنًا وجود متّجهات X تحقق

(20.2) ، وإعطاء طريقة لإيجاد مثل هذه المتّجهات في حال وجود أي منها . وسيصبح من الواضح خلال المناقشة أنه قد لا يكون لنظام المعادلات في (20.1) أي حل على الإطلاق . وقد يكون لها بالضبط حل واحد ، أو قد يوجد أكثر من حل واحد ، وفي مثل هذه الحال سيكون لها ما لا نهاية له من الحلول .

والطريقة المألوفة في حل المعادلات (20.1) هي طريقة الحذف المتتالي للمجاهيل . وسنفرض أنه في معادلة واحدة على الأقل، مثلاً الأولى، يختلف معامل x_n عن الصفر . (في الحالة المعاكسة سوف لا يحوي نظام المعادلات على n من المجاهيل) . ونحل إحدى المعادلات من أجل x_n بدلالة $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ، a_{ij} و k_i ، ونعوِّض في المعادلات الباقية ، فنحذف x_n. ونظام المعادلات الناتجة ، والتي لا تتحول إلى مطابقة ، تحوي على الأكثر $n - 1$ من المجاهيل . وبعدها نمضي في حذف المجاهيل الباقية واحدًا تلو الآخر . ويمكن أن تقودنا عملية الحذف إلى معادلة من الشكل $0 = c$ ، حيث $c \neq 0$. ومن الواضح أن هذه العلاقة مستحيلة ، أي لا يوجد للنظام (20.1) حل في هذه الحالة . وفيما عدا ذلك ننتهي إلى معادلة من الشكل :

$$b_i x_i + \cdots + b_j x_j = c_k, \qquad (j \geq i), \tag{20.4}$$

أو إلى معادلتين أو أكثر من هذا النوع ، بحيث لا يوجد بين أي اثنتين منها مجهول مشترك ، وفي كل منها b واحدة على الأقل تختلف عن الصفر . إذا كانت $b_i \neq 0$ ، ننقل إلى الطرف الأيمن في (20.4) الحدود التي تحوي $x_{i+1}, \ldots, x_j$ ، ونخصص لهذه الأخيرة قيمًا اختيارية من الحقل $\mathscr{F}$. ونحل من أجل x_i بصورة وحيدة . وعندئذ نقتفي أثر الخطوات التي احتوتها عملية الحذف ونحلّ على التتابع من أجل المتغيّرات التي حُذفت حتى نجد أخيرًا مجموعة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تحقق (20.1).

ونلاحظ أن الطريقة السابقة تستخدم فقط العمليات النسبيّة الأربع ، ويتضح إذن أنه إذا كانت عناصر المصفوفتين A و K من حقل $\mathscr{F}$ ، فإنه إذا كان للمعادلات (20.1) أي حل على الإطلاق ، فسيكون هذا الحل في $\mathscr{F}$.

٢١ ـ مجموعة n من المعادلات بـ n من المجاهيل ومحدّد غير منعدم

لنعتبر أولاً نظام n من المعادلات بـ n من المجاهيل:

$$AX = K, \tag{21.1}$$

حيث A مصفوفة مربّعة $n \times n$ غير شاذة. بضرب طرفي (21.1) من اليسار بـ A^{-1}، نظير A، نحصل على

$$X = A^{-1}K, \tag{21.2}$$

وهذا الحل يحقق (21.1) بالإضافة إلى أنه الحل الوحيد. وبما أن عناصر الصف i من A^{-1} هي:

$$\frac{\alpha_{1i}}{|A|}, \frac{\alpha_{2i}}{|A|}, \cdots, \frac{\alpha_{ni}}{|A|},$$

فيمكن كتابة (21.2) على الشكل:

$$x_i = \frac{1}{|A|}(\alpha_{1i}k_1 + \alpha_{2i}k_2 + \cdots + \alpha_{ni}k_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{21.3}$$

لنكتب الآن $\Delta = |A|$. بما أن $\Delta = \alpha_{1i}a_{1i} + \alpha_{2i}a_{2i} + \ldots + \alpha_{ni}a_{ni}$ فيتضح جليًّا من النشر وفقًا لعناصر العمود i أن العبارة بين قوسين في الطرف الأيمن من (21.3) هي بالضبط محدّد المصفوفة التي نحصل عليها من A بعد وضع $k_1, k_2, \ldots, k_n$ بدلاً من عمودها الـ i، وإذا رمزنا بـ Δ_i لهذا المحدّد المذكور أخيرًا فيمكن كتابة (21.3) على الشكل:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{21.4}$$

وتُعرف هذه النتيجة كقاعدة كرامير *Cramèr*(*).

نظريـة (٢١ ـ ١)

ليكن النظام (21.1) من n من المعادلات الخطّية في n من المجاهيل، $x_1, x_2, \ldots, x_n$، إذا كان محدّد المعاملات $|A| = \Delta$ مختلفًا عن الصفر فيكون للنظام عندئذ حل وحيد $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$، حيث Δ_i هو محدّد المصفوفة التي نحصل عليها من A بوضع المقادير k بدلاً من العمود i.

(*) Gabriel Cramèr, (1704 - 1752).

٢٢ ـ نظام m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل

لنعد الآن إلى النظام (20.1) المؤلف من m معادلة في n من المجاهيل. وستدعى المصفـوفة $\underset{m\times n}{A}$ في (20.3) بمصفوفة المعاملات، والمصفوفة $m \times (n+1)$ التي نحصل عليها بإضافة عمود المقادير k إلى A تدعى المصفوفة الموسّعة M .

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_m \end{bmatrix}$$

وإذا رمزنا بـ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ لمتّجهات العمود ذات الـ m بُعدًا والموجودة في المصفوفة A ، وبـ K للمتّجه الذي يقع في العمود الأخير من M ، فمن الواضح أنه يمكن كتابة نظام المعادلات في (20.1) مستخدمين مصطلحات المتّجهات كما يلي :

$$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_nV_n = K. \qquad (22.2)$$

وبالتالي فإن (22.2) ، وبالتالي (20.1) ، تمتلك حلاًّ إذا، وفقط إذا، كان المتجه K منتميًا إلى الفضاء المتّجه المتولد عن المتّجهات $V_1, V_2, \ldots, V_n$. ويمكن عرض هذه النتيجة على شكل نظرية.

نظريـة (٢٢ ـ ١)

إذا كان لدينا النظام (20.1) من m من المعادلات الخطّية في n من المجاهيل، وكانت $V_1, V_2, \ldots, V_n$ هي متّجهات الأعمدة في مصفوفة المعاملات A في (20.3) ، فإن الشرط اللازم والكافي ليكون نظام المعادلات قابلًا للحلّ هو أن يكون متّجه الحدود الثابتة K واقعًا ضمن فضاء المتّجهات الخطّي المتولد عن المتّجهات V .

ويمكن صياغة شروط النظرية السابقة بطريقة أخرى. لنرمز بـ r لرتبة مصفوفة المعاملات A في (20.3). فبالاستناد إلى النظرية (١٨ ـ ٥) تكون r بالضبط من المتّجهات V_i مستقلة خطيًّا في حين يمكن التعبير عن أي متّجه من الفضاء الخطّي Γ_r المتولد عن المتّجهات V كتركيب خطّي في هذه المتّجهات. وإذا انتمى المتّجه K عندئذ إلى Γ_r ، فلا

يمكن، وفقًا للنظرية (١٨ ـ ٤)، أن تتجاوز رتبة M العدد r وبالتالي فهي تساوي تمامًا r.

وعلى العكس، إذا كانت رتبة M مساوية لـ r، أي مساوية لرتبة A، فمن النظرية (١٩ ـ ٢) نجد أن المتّجه K يقع ضمن فضاء المتّجهات Γ_r المتولد عن المتّجهات V، وبالتالي فإن المعادلة (22.2) قابلة للحل. وهكذا نجد النظرية التالية:

نظرية (٢٢ ـ ٢)

الشرط اللازم والكافي ليكون نظام m من المعادلات الخطّية في n من المجاهيل قابلًا للحل هو أن تكون رتبة مصفوفة المعاملات مساوية لرتبة المصفوفة الموسّعة.

وعندما تكون المعادلات (20.1) قابلة للحل، فقد تكون أفضل طريقة للحصول على جميع الحلول هو أن نبدأ كما يلي: لنفرض أن لمصفوفة المعاملات وللمصفوفة الموسّعة الرتبة r نفسها ولنُعِد كتابة المعادلات على الشكل:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n - k_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_r(x) &= a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n - k_r = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x) &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n - k_m = 0; \end{aligned} \tag{22.3}$$

حيث نفترض أنه يمكن تغيير ترتيب المعادلات عند الضرورة بحيث تكون رتبة مصفوفة المعاملات في الدوالّ الـ r الأولى $f_1, f_2, \dots, f_r$ مساوية لـ r. ونجد الآن من النظرية (١٨ ـ ٥) أن الدوالّ الخطّية $f_1, f_2, \dots, f_r$ مستقلة خطيًّا. في حين يمكن التعبير عن كل من الدوال f الباقية (في حال بقاء أي منها) كتركيب خطّي في $f_1, \dots, f_r$. وهكذا يكون:

$$\begin{aligned} f_j(x) &= c_{1j}f_1(x) + \cdots + c_{rj}f_r(x), \\ &\qquad (j = r+1, r+2, \cdots, m). \end{aligned} \tag{22.4}$$

ومن (22.4) نجد أن أي مجموعة $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ تحقّق $f_1(x) = 0, \dots, f_r(x) = 0$ ستجعل $f_j(x) = 0$ أيضًا، $(j = r + 1, \dots, m)$. ويمكن إذن حفظ المعادلات الـ r الأولى فقط في (22.3) ونهمل المعادلات الباقية كمعادلات لا تقدم شيئًا جديدًا. ولحل

المعادلات الـ r الأولى في (22.3) ، نحتفظ في الطرف الأيسر بـ r من المجاهيل، ولنقل $x_{i1}, \ldots, x_{ir}$ ، ومصفوفة معاملاتها غير شاذة، ثم ننقل جميع الحدود الباقية إلى الطرف الأيمن. وفي حال وجود مجاهيل في الطرف الأيمن نخصص لها قيمًا كيفيّة، ثم نحلّ من أجل المجاهيل $x_{i1}, \ldots, x_{ir}$ حلاً وحيدًا وفقًا لقاعدة كرامير (Cramèr).

٢٣ ـ نظام المعادلات الخطّية المتجانسة

لنعتبر الآن نظامًا m من المعادلات الخطّية المتجانسة التي تنتج عن (20.1) عند وضع أصفار بدلاً من المقادير k:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad & \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned} \tag{23.1}$$

إذا كانت $A = (a_{ij})$ هي مصفوفة المعاملات $m \times n$ وX مصفوفة من عمود واحد أو متّجه عمود، فيمكن كتابة (23.1) بدلالة المصفوفات على الشكل:

$$AX = 0. \tag{23.2}$$

وللمعادلة (23.2) حل واضح هو المتّجه الصفري، وسندعو هذا الحل بالحل التافه. ونتساءل الآن تحت أية شروط توجد حلول أخرى كما نسعى لتوفير طرق لإيجاد جميع الحلول في حال وجودها.

وقبل كل شيء نبرهن النظرية:

نظريـة (٢٣ ـ ١)

تؤلّف مجموعة كل متّجهات الحل لنظام المعادلات الخطّية المتجانسة في (23.1) فضاء متّجهات خطيًا.

ذلك لأنه إذا كان X متجهًا يحقق (23.2) وc عددًا سلّميًا، فلدينا

$$A(cX) = cAX = 0.$$

وفضلاً عن ذلك إذا كان Y متّجهًا ثانيًا بحيث إن $AY = 0$ ، فعندئذ

$$A\,(X + Y) = AX + AY = 0$$ وهو المطلوب إثباته

وسندعو فضاء المتّجهات Γ ، فضاء الحلول لنظام المعادلات (23.1).

وإذا نظرنا إلى المتّجهات التي تحقّق (23.2) كأعمدة في مصفوفة $\underset{n\times q}{X}$ ، فإن بُعد فضاء الحلول Γ هو بالضبط العدد الأعظمي للأعمدة المستقلة خطيًا في X ، أي الرتبة العـظمى التي يمكن أن تكـون لِـ X ، وإذا كانت رتبـة A هي r ، فمن النـظرية (١٦ ـ ٢) نجد أن هذا العدد الأعظمي هو $n-r$.

تعريـف

إذا كان Γ هو فضـاء المتّجهـات الخـطّي الـذي تشكّل متّجهاته حلولاً لنظام المعادلات المتجانسة في (23.1) ، فيدعى أي أساس Γ لفضاء الحلول مجموعة أساسية من الحلول للنظام (23.0)

ومن الواضح أن أي $n-r$ من الحلول المستقلة خطيًا لِـ (23.1) تشكّل مجموعة أساسية. وإحدى طرق الحصول على مجموعة أساسية هي كما يلي :

إذا كانت رتبة المصفوفة A للنظام (23.1) هي r ، فإن r من المعادلات تمامًا تكون مستقلة خطيًا، في حين تكون كل من المعادلات الـ $m-r$ الباقية تراكيب خطّية في هذه المعادلات. نحتفظ بِـ r من المعادلات المستقلة خطيًا ونهمل الباقي، إذا كانت هناك أية معادلات باقية. وفي المعادلات الـ r التي احتفظنا بها، نترك على اليسار حدودًا تحوي r من المجاهيل، محدّد معاملاتها يختلف عن الصفر، وننقل الحدود التي تحوي المجاهيل البـاقية إلى اليمـين. وإذا كانت المتغيّرات قد رُقِّمت بحيث إن محدد معـامـلات $x_1, x_2, \dots, x_r$ يختلف عن الصفر، فإن المعادلات ستأخذ الشكل :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r &= -a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r &= -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n, \end{aligned} \tag{23.3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

وإذا كان $r=n$ فإن الأطـراف اليمنى من المعـادلات (23.3) تكـون أصفـارًا، ومن خلال قاعـدة كرامـير (Cramèr) نحصـل على الحل الوحيد $(0, 0, \dots, 0)$. ومن أجل

$r < n$ نخصص للمجاهيل $x_{r+1}, \dots, x_n$ قيمًا كيفيّة ثم نحلّ بصورة وحيدة من أجل $x_1, x_2, \dots, x_r$ بدلالة قيم $x_{r+1}, \dots, x_n$ ، وهكذا نكتب

$$\begin{array}{c} (x'_1, \cdots, x'_r, x'_{r+1}, \cdots, x'_n), \\ (x''_1, \cdots, x''_r, x''_{r+1}, \cdots, x''_n), \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ (x_1^{(n-r)}, \cdots, x_r^{(n-r)}, x_{r+1}^{(n-r)}, \cdots, x_n^{(n-r)}). \end{array} \tag{23.4}$$

وإذا كانت القيم المخصّصة على التتالي لِـ $x_{r+1}, \dots, x_n$ بحيث إن المحدّد

$$\begin{vmatrix} x'_{r+1}, & \cdots, & x'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{r+1}^{(n-r)}, & \cdots, & x_n^{(n-r)} \end{vmatrix}$$

يختلف عن الصفـر، ومثل هذا الاختيار هو بوضوح ممكن، وفي عديد من الطرق، فتكون الحلول الـ $(n - r)$ في (23.4) مستقلة خطيًّا، وتشكّل مجموعة الحلول مجموعة أساسية من الحلول لِـ (23.1) أو أساسًا لفضاء الحلول Γ .

ومنه نجد النظرية :

نظريـة (٢٣ ـ ٢)

ليكن نظامًا من m من المعادلات الخطّية المتجانسة في n من المجاهيل، ولنفرض أن رتبـة مصفـوفـة المعـامـلات هي r . إذا كان $r = n$ فإن نظام المعادلات يمتلك فقط الحل التافه $(0, 0, \dots, 0)$. وإذا كان $r < n$ فنستطيع دائمًا إيجاد $n - r$ من الحلول المستقلة خطيًّا بحيث يمكن التعبير عن كل حل للنظام كتركيب خطّي في هذه الحلول.

ويمكننا الآن أن نعرض مباشرة النتائج التالية :

نتيجـة (٢٣ ـ ٣)

يكون لنظام من m من المعادلات الخطّية المتجانسة في n من المجاهيل حل غير الحل التافه $(0, 0, \dots, 0)$ إذا، وفقط إذا، كانت رتبة مصفوفة المعاملات أقل من n. وبـالتـالي فإن نظامًا كهذا من المعادلات يمتلك دائمًا حلًّا غير الحل التافه إذا كانت $m < n$.

نتيجة (٢٣ ـ ٤)

يكون لنظام n من المعادلات الخطّية المتجانسة في n من المجاهيل حل آخر غير الحل $(0, 0, \ldots, 0)$ إذا، وفقط إذا، كان محدّد المعاملات منعدمًا.

والحالة الخاصة ذات الأهمية هي تلك التي يكون لدينا فيها نظام من $(n-1)$ من المعادلات المستقلة خطّيًا. ورتبة المصفوفة عندئذ هي $n-1$. ونبرهن في هذه الحالة النظرية التالية:

نظرية (٢٣ ـ ٥)

ليكن نظام من $n-1$ من المعادلات الخطّية المتجانسة في n من المجاهيل، ورتبة مصفوفتها A هي $n-1$. إذا رمزنا بـ Δ_j لمحدّد المصفوفة المربّعة $(n-1)\times(n-1)$ التي نحصل عليها من A بعد حذف العمود j، فيكون كل حلّ لنظام المعادلات متناسبًا مع

$$(\Delta_1, -\Delta_2, \cdots, (-1)^{i+1}\Delta_i, \cdots, (-1)^{n+1}\Delta_n).$$

لبرهان هذه النظرية نلاحظ أولًا أنه بالاستناد إلى النظرية (٢٣ ـ ٢) يكون للنظام حل واحد فقط مستقل خطّيًا، أي أن جميع الحلول تكون متناسبة مع حل واحد غير تافه. لنعتبر الآن المصفوفة المربّعة $\underset{n\times n}{D}$، التي تكون فيها المقادير z كيفيّة

$$D = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} \end{bmatrix}.$$

إذا رمزنا بـ k_j للعامل المرافق لـ z_j في $|D|$، فمن الواضح أن $k_j = (-1)^{j+1}\Delta_j$، ولدينا من خواص المحددات

$$\sum a_{ij}k_j = \sum a_{ij}(-1)^{j+1}\Delta_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

وهـذا يعني أن المتّجه المعطى في النظرية هو في الواقع حل. وفضلاً عن ذلك، فإن المقادير Δ_r ليست جميعها أصفارًا طالما أن رتبة المصفوفة A هي $n-1$. وهو المطلوب.

تماريـن

لتكن النظم التالية من المعادلات الخطّية. حدِّد في كل حالة ما إذا كان للنظام حل أم لا، وإذا كان الأمر كذلك فاحسب الحل الأكثر شمولية.

(١
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 4x - y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

(٢
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 4x - y + 2z &= 8 \\ 11x + 4y - 5z &= 4 \end{aligned}$$

(٣
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 4x - y + 2z &= 8 \\ 5x - 8y + 13z &= 25 \end{aligned}$$

(٤
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 4x - y + 2z &= 8 \\ -3x + 3y - 5z &= -12 \end{aligned}$$

(٥
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= -2 \end{aligned}$$

(٦
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(٧
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= k_1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= k_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= k_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= k_4 \end{aligned}$$

(٨
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= k \\ a^2x + b^2y + c^2z &= k^2 \end{aligned}$$

حدِّد مجموعة أساسية من الحلول من أجل كل من النظم التالية من المعادلات الخطِّية المتجانسة.

(٩
$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 0 \\ 2x + 4y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

(١٠
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(١١
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(١٢
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - y + 2z &= 0 \\ 3x - 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

حدِّد مجموعتين أساسيتين من الحلول لكل من النظم التالية من المعادلات الخطِّية المتجانسة.

١٣)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

١٤)
$$\begin{aligned} x + 2y + z - 3w &= 0 \\ 2x + 4y + 2z - 6w &= 0 \\ 3x + 6y + 3z - 9w &= 0 \\ 4x + 8y + 4z - 12w &= 0 \end{aligned}$$



الفصل السابع

المعادلة
المميّزة لمصفوفة

٢٤ - تحويلات خطّية متجانسة

لنعتبر مجموعة كل المتّجهات $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ذات الـ n بُعدًا فوق حقل $\mathscr{F}$ ، أي متّجهات تكون إحداثياتها أو مركباتها عناصر من $\mathscr{F}$. وتؤلف مثل هذه المجموعة من المتّجهات فضاء متّجهات خطّيًا Γ ذا n بُعدًا. ويمكن أخذ أي n من المتّجهات المستقلة خطّيًا من Γ_n لتكون أساسًا Γ_n ، وعلى سبيل المثال نذكر المتّجهات

$$U_1 = (1, 0, \ldots, 0), U_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, U_n = (0, 0, \ldots, 0, 1) \quad (24.1)$$

وبالنسبة لهذا الأساس يمكن كتابة المتّجه $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ على الشكل:

$$Y = \sum y_i U_i = y_1 U_1 + y_2 U_2 + \cdots + y_n U_n,$$

حيث المقادير y هي عناصر من $\mathscr{F}$ محدّدة بصورة وحيدة. وفضلاً عن ذلك فإن المتّجهات:

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum a_{1i} U_i = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}), \\ V_2 &= \sum a_{2i} U_i = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_n &= \sum a_{ni} U_i = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}), \end{aligned} \quad (24.2)$$

حيث a_{ij} عناصر من $\mathscr{F}$ اختيرت بحيث إن المحدّد $|A| = |a_{ij}|$ يختلف عن الصفر، وهي تشكل أساسًا لـ Γ_n . ويمكن كتابة أي متّجه X من Γ_n بصورة وحيدة على الشكل:

$$X = \sum z_i V_i.$$

وتدعى المركبات $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ إحداثيات X بالنسبة للأساس V.

وعادة(*) لا يكون لمتّجه ما، له مجموعة من الإحداثيات بالنسبة لأساس معينً، الإحداثيات نفسها بالنسبة لأساس آخر. وعلى سبيل المثال، لتكن إحداثيات متّجه كيفي X بالنسبة للأساس U أي بالنسبة لِـ $U_1, U_2, \ldots, U_n$ هي $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، وبالنسبة للأساس V، أي بالنسبة لِـ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ هي $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. بحيث يمكن كتابة

$$X = \sum x_i U_i = \sum z_i V_i. \qquad (24.3)$$

فبما أن المتّجهات $V_1, V_2, \ldots, V_n$ تشكّل أساسًا للفضاء Γ_n. فيمكن التعبير عن كل متّجه U_j، وبصورة وحيدة، كتركيب خطّي فيها. أي:

$$U_i = \sum_i c_{ij} V_i, \qquad |c_{ij}| \neq 0. \qquad (24.4)$$

وبتبديل هذه العبارة الأخيرة في (24.3) نجد:

$$\sum z_i V_i = \sum_j x_j \sum_i c_{ij} V_i = \sum_i \left(\sum_j c_{ij} x_j\right) V_i.$$

وبالتالي، وبما أن المتّجهات V_i مستقلة خطيًا فلدينا:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \qquad (i = 1, \cdots, n), \qquad |c_{ij}| \neq 0. \qquad (24.5)$$

ويمكن إذن عرض النظرية التالية:

نظرية (٢٤ - ١)

إذا كان لمتّجه كيفي X في فضاء المتّجهات الخطّي ذي الـ n بعدًا Γ_n، والمعرّف فوق حقل $\mathscr{F}$، الإحداثيات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بالنسبة للأساس U، والإحداثيات $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ بالنسبة للأساس V، كما في (24.2)، فإن مجموعتي الإحداثيات ترتبطان بعلاقة خطّية متجانسة من النوع (24.5) حيث c_{ij} هي عناصر من $\mathscr{F}$. و $|c_{ij}| \neq 0$، وعلى العكس. يمكن دائمًا تفسير معادلات من الشكل (24.5) كشكل انتقالي من أساس لِـ Γ_n إلى آخر، بحيث يرتبط الأساسان بعلاقة من الشكل (24.4).

يمكن تفسير المعادلات (24.5) بطريقة أخرى. فبدلاً من اعتبار المجموعتين $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ كمجموعتين من الإحداثيات للمتّجه نفسه بالنسبة

(*) للمتجه الصفري الإحداثيات نفسها $(0, 0, \ldots, 0)$ بالنسبة لأي أساس.

لأساسين مختلفين يمكن اعتبارهما إحداثيات لمتّجهين متميّزين بالنسبة للأساس نفسه.
ونكتب (24.5) كمعادلة مصفوفات:

$$Z = CX, \tag{24.6}$$

حيث Z و X هما متّجها عمود، ونقول إن المتّجه X قد حُوِّل إلى المتّجه Z بوساطة التحويل المتجانس الخطّي الذي تُمثّله المصفوفة C. وإذا كانت C غير شاذة، نقول إن التحويل (24.6) غير شاذ. وبالنسبة لأساس ثابت، تكون مصفوفة التحويل C وحيدة، وعلى العكس تحدد المصفوفة C التحويل بصورة وحيدة. أما إذا كانت المصفوفة C شاذة فنقول إن التحويل شاذ.

لنفرض أنه تحت تحويل مصفوفة C في (24.6) تمَّ تحويل المتّجه X إلى المتّجه Z، ولنفرض أنه تحت تحويل مصفوفة D تمَّ تحويل المتّجه Z إلى المتّجه Y.

$$Y = DZ \tag{24.7}$$

فإذا عوضنا من (24.6) في (24.7) نحصل على:

$$Y = DZ = DCX. \tag{24.8}$$

وندعو (24.8) جداء التحويلين (24.6) و (24.7). وإذا كان كل من التحويلين الأخيرين غير شاذ فإن جداءهما غير شاذ. ومنه نجد النظرية:

نظريـة (٢٤ ـ ٢)

إذا حُوِّل المتّجه X إلى المتّجه Z تحت التحويل المتجانس الخطّي للمصفوفة C أي $Z = CX$، وحُوِّل المتّجه Z إلى المتّجه Y تحت التحويل $Y = DZ$ للمصفوفة D، فيمكن تحويل المتّجه X مباشرةً إلى المتّجه Y بوساطة مصفوفة التحويل DC.

نتيجـة (٢٤ ـ ٣)

عند تشكيل جداء تحويلين خطّيين يكون الجداء متصفًا بخاصة الدمج.

وهذا نتيجة مباشرة لحقيقة أن جداء المصفوفات يتصف بخاصة الدمج.

إذا كانت المصفوفة C في التحويل (24.6) غير شاذة، فإن التحويل (24.7) مع $D = C^{-1}$.

$$Y = C^{-1}Z \tag{24.9}$$

هو التحويل المعاكس لِـ (24.6). وفي هذه الحالة، تعطي العلاقة (24.8) ، $Y = X$ ، أي أنه كما ينقل التحويل (24.6) X إلى Z ، ينقل التحويل (24.9) Z إلى X.

٢٥ ـ تغيير الأساس

ليكن التحويل الخطّي

$$Y = AX. \tag{25.1}$$

بالنسبة لأساس معطى لفضاء المتّجهات الخطّي Γ_n .

إذا غيّرنا الآن أساس فضاء المتّجهات؛ فلا تعود الإحداثيات* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ للمتّجه X هي الإحداثيات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ التي كانت له بالنسبة للأساس الأصلي. ومن النظرية (٢٤ ـ ١) توجد مصفوفة غير شاذة C بحيث إن $X = C\bar{X}$ ، وبصورة مشابهة $Y = C\bar{Y}$. وبتعويض هذه العبارة في (25.1) نحصل على:

$$C\bar{Y} = AC\bar{X},$$

ومنه

$$\bar{Y} = (C^{-1}AC)\bar{X}. \tag{25.2}$$

ويمكن النظر إلى (25.1) و (25.2) بطريقتين: (أ) كتمثيل للتحويل نفسه ولكنه أُعيد إلى هيكلي إسناد مختلفين. (ب) كتمثيل لتحويلين مختلفين يعودان إلى هيكل الإسناد نفسه. ومن وجهة النظر الأولى يبدو أن الخواص الهندسية للتحويلين متطابقة. ومن وجهة النظر الأخيرة، يُقال: إن التحويلين الأخيرين، وبالتالي مصفوفتيهما، متماثلتان: وتدعى المصفوفة $C^{-1}AC$ غالبًا تحويل** A بوساطة C.

---

* المتّجه $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ هنا لا يعني مرافق المتّجه X في حقل الأعداد المركبة، ولكنه يعني فقط متّجهًا له مجموعة مختلفة من المركبات من الحقل $\mathscr{F}$.

** وبتحديد أكثر تحويل الكونترجراديانت لتمييزه عن تحويل الكوجراديانت $C'AC$ الذي سنقدمه فيما بعد.

٢٦ ـ المتّجهات اللامتغيّرة تحت تحويل خطّي

ليكن $Y = AX$ تحويلاً خطّيًا بمصفوفة A تقع عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. ليكن λ عنصرًا من $\mathscr{F}$ أو من حقل موسَّع $\mathscr{F}_1$ لـ $\mathscr{F}$. وإذا كان X عندئذ متّجهًا في $\mathscr{F}_1$ بحيث إن :

$$AX = \lambda X, \tag{26.1}$$

فسنقول إن X متّجه لا متغيّر تحت التحويل A.

وإذا كان $\mathscr{F}_1$ هو حقل الأعداد الحقيقية و A مصفوفة 2×2 أو 3×3 ، فإن للمتّجه λX اتجاه X نفسه أو عكسه وذلك وفقًا لما إذا كان $\lambda > 0$ أو $\lambda < 0$ ، وطول λX هو جداء** $|\lambda|$ بـ X. وهكذا يكون X متّجهًا لا متغيرًا إطلاقًا، فقط إذا كان $\lambda = 1$ ، أي أن $AX = X$. وعلى أي حال، فإننا سنسمّي X متّجهًا لا متغيّرًا حتى لو كان $\lambda \neq 1$ شريطة أن يحقّق (26.1).

وتكافيء معادلة المصفوفات (26.1) نظام n من المعادلات المتجانسة الخطّية في n من المجاهيل، والتي يمكن كتابتها، بعد نقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر، على الشكل :

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0.
\end{aligned} \tag{26.2}$$

ومصفوفة هذا النظام من المعادلات هي $A - \lambda I$. ولهذا النظام من المعادلات دائمًا الحل التافه $(0, 0, \ldots, 0)$ مما يعني أن المتّجه صفر هو دائمًا متّجه لا متغير. ولكي يكون ممكنًا إيجاد متّجهات $X \neq 0$ ، وتحقق (26.2) ، فمن اللازم والكافي، وفقًا للنتيجة (٢٣ ـ ٤) أن نختار λ بحيث ينعدم $|A - \lambda I|$. وبتأمل الحد الموافق للقطر يتضح أن مفكوك المحدّد يحوي الحد $(-\lambda)^n$ ولكنه لا يحوي أي قوة أعلى في λ بحيث إن $|A - \lambda I|$ هو كثيرة حدود $f(\lambda)$ من الدرجة n. ونحصل على الحد الثابت، أي الحد الذي لا يحوي λ بوضع $\lambda = 0$ في $|A - \lambda I|$ ، أي أن الحد الثابت يساوي $|A|$. ومنه :

** هنا $|\lambda|$ تمثل القيمة المطلقة لـ λ.

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + \cdots + |A|. \qquad (26.3)$$

ليكن α_1 جذرًا للمعـادلـة $f(\lambda) = 0$ في $\mathscr{F}$. أو في حقـل $\mathscr{F}_1$ يحتـوي الحقـل $\mathscr{F}$. إذا عوضنـــا α_1 بدلاً من λ في نظام المعـادلات (26.2) فإن محدّد النـظام ينعـدم مما يعني أن رتبـــة المصفـــوفـــة $A - \alpha_1 I$ أصغـر أو تسـاوي $n - 1$. وإذا كانت رتبـة المصفـوفـة $A - \alpha_1 I$ مسـاوية لِـ r فيوجـد تمامًـا $n - r$ من الحلول المستقلة خطّيًّا لنـظام المعادلات. أي أننا نحصل في مقابل الجذر α_1 للمعادلة $f(\lambda) = 0$ على فضاء متّجهات خطّي ذي $n - r$ بُعـدًا، وكـل متّجـه X من هذا الفضاء يحقّق المعادلة $AX = \alpha_1 X$ وهو لذلك متّجــه لا متغــيّر للتحـويل المـوافق للجـذر α_1. وإذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ الجـذور المختلفة للمعادلة $f(\lambda) = 0$، ففي مقابل كل جذر α_i نحصل بالطريقة المشار إليها على متّجه لا متغيّر واحد، على الأقل.

توضيـح: إذا كان $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$، فأوجـد المتّجهـات الـلامتغيرة للتحويل $Y = AX$.

حلّ: المعادلة $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ هنا هي

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 & -2 \\ 4 & 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 28 = 0, \qquad (26.4)$$

وجذورها -2 ، -2 ، و7. إذا أخذنا $\alpha_1 = -2$ نجد أن رتبة المصفوفة

$$A - \alpha_1 I = A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (26.5)$$

هي الواحد. ولإيجاد متّجهات لا متغيرة $X = (x_1, x_2, x_3)$ موافقة للجذر $2 -$ ، علينا حل المعادلة الوحيدة:

$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \qquad (26.6)$$

ولـدينـا إذن فضاء متّجهات خطّي Γ_2 ذو بعدين، وكل متّجه منه هو متّجه لا متغيّر يحقق المعـادلـة $AX = -2X$. ولإيجاد أساس Γ_2 ، نجد حلّين مستقلين لِـ (26.6) ، مثلاً $(1, 0, 2)$ و $(0, 1, 2)$.

وأي متّجـه من الفضـاء الخطّي المتولد عن هذين المتّجهين هو متّجه لا متغيّر موافق للجذر $2 -$.

وبـطريقة مشابهة إذا استخدمنا الجذر $\lambda = 7$ للمعادلة $f(\lambda) = 0$ ، في (26.4) نحصل على المتّجه اللامتغير الوحيد $(2, 2, -1)$ الذي يحقّق المعادلة $AX = 7X$.

٢٧ ـ المعادلة المميّزة لمصفوفة

لتكن A مصفـوفة مربّعة بعناصر من حقل $\mathscr{F}$. إذا كان λ عددًا سُلَّميًا يتغير فوق $\mathscr{F}$ ، فتـدعى المصفـوفـة $A - \lambda I$ المصفـوفـة المميّزة لِـ A ؛ ويدعى المحـدّد $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ المحـدّد المميز أو الـدّالـة المميّزة لِـ A ، المعـادلة $f(\lambda) = 0$ تدعى المعـادلـة المميّزة لِـ A ، وجذور $f(\lambda) = 0$ تدعى الجذور المميّزة أو الجذور الكامنة، أو القيم المميّزة لِـ A. والمعادلة المميّزة $|A - \lambda I| = 0$ لمصفوفة A هي واحدة من أهم المعادلات في الجبر الحديث.

ولإيجاد مفكوك المحدّد ثم التعبير المناسب لِـ $f(\lambda)$ ، نعيد كتابة المحدّد على الشكل

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} - 0 & \cdots & a_{1n} - 0 \\ a_{21} - 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} - 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - 0 & a_{n2} - 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix},$$

حيث يتـألف العمود j من العمود j من A ناقصًا العمود j من λI. وبما أن كل عمود من المصفوفات يتألف من عناصر ثنائية، فيمكن التعبير عن المحدّد كمجموع 2^n من المحـدّدات وأحـدها $(-\lambda)^n$ ، يتألف من أعمدة $-\lambda I$ فقط؛ وآخر وهو $|A|$ يتألف من أعمدة A فقط، في حين يتألف كل من المحدّدات الباقية من m من أعمدة A و $n - m$

من أعمـدة $-\lambda I$ ، $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ ، مختـارة بجميع الـطرق الممكنـة. لتكن $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ مجموعـة من m من الأعـداد $1, 2, \ldots, n$ ، ولنعتـبر المحدّد المؤلف من الأعمـدة $i_1, i_2, \ldots, i_m$ من A في حين أن الأعمـدة الـ $n-m$ البـاقية هي من $-\lambda I$. لننشر هذا المحـدّد بطريقـة لابـلاس وفقًـا للأعمـدة $i_1, i_2, \ldots, i_m$. بما أن العناصر $-\lambda$ لا تقع إلا في القطر الرئيسي، فإن قيمة المحدّد هي $|M_m| \cdot (-\lambda)^{n-m}$ حيث M_m المصفـوفـة المصغَّرة الأسـاسية من A الـواقعـة في الصفوف $i_1, i_2, \ldots, i_m$ والأعـمـدة من A ذوات الأرقـام نفـسـهـا. وإذْ تـأخـذ $i_1, i_2, \ldots, i_m$ كل متوافقات الأعداد $1, 2, \ldots, n$ مأخوذ m منها في وقت واحد، فمن الواضح أن معامل $(-\lambda)^{n-m}$ في نشر $|A - \lambda I|$ هو σ_m ، حيث ترمز σ_m لمجموع كل المحدّدات المصغّرة الأساسية ذات الـ m صفًا من A.

وهكذا نجد النظرية التالية:

نظريـة (٢٧ - ١)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها من حقل $\mathcal{F}$. إذا رمزنا بـ σ_m لمجموع كل المحدّدات المصغّرة الأساسية ذات الـ m صفًا من A ، فالدالة المميّزة لـ A هي:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = (-\lambda)^n + \sigma_1(-\lambda)^{n-1} + \sigma_2(-\lambda)^{n-2} + \cdots - \lambda\sigma_{n-1} + |A| = \sum_{m=0}^{n} (-\lambda)^{n-m}\sigma_m, \tag{27.1}$$

حيث $\sigma_0 = 1$ و $\sigma_n = |A|$.

توضيح: إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

فلدينا:

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = 2 + 2 - 1 = 3,$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 16 - 2 - 4 - 2 - 4 = -24,$$

$$\sigma_3 = |A| = 28.$$

ومنه

$$f(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 28.$$

ونجد مباشرة النتيجة المهمة التالية :

نتيجة (٢٧ ـ ٢)

إذا كان 0 جذرًا مميّزًا مضاعفًا ν مرة لمصفوفة مربّعة $\underset{n\times n}{A}$ ، فإن رتبة A لا يمكن أن تكون أقل من $n - \nu$.

ذلك لأنه إذا كانت رتبة A أصغر من $n - \nu$ فسيكون لدينا $\sigma_{n-\nu} = \sigma_{n-\nu+1} = \ldots = \sigma_n = 0$ وبالتالي فإن $f(\lambda) = |A - \lambda I| = (\lambda)^n + \ldots + \sigma_{n-\nu-1}\lambda^{\nu+1}$ قابل للقسمة على $\lambda^{\nu+1}$ وهذا بدوره يعني أن الصفر هو جذر مضاعف $\nu + 1$ مرة على الأقل. وفي بعض الحالات يمكن أن تكون رتبة A أكبر من $n - \nu$ ، فمثلاً إذا كان $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. وهنا $n = 2$ ، $\nu = 2$ في حين أن $r = 1$.

نظرية (٢٧ ـ ٣)

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الجذور المميّزة لمصفوفة مربّعة $\underset{n\times n}{A}$ وكان k عددًا سلّميًا فإن الجذور المميّزة لِـ $A - kI$ هي $\alpha_1 - k$ ، $\alpha_2 - k$ ، . . . ، $\alpha_n - k$.

ذلك لأنه إذا كانت الدالّة المميّزة لـ A هي :

$$|A - \lambda I| = \sum (-\lambda)^{n-m}\sigma_m \equiv (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda) \cdots (\alpha_n - \lambda),$$

فعندئذ تكون الدّالة المميّزة لِـ $A - kI$ هي :

$$|A - kI - \lambda I| = |A - (k + \lambda)I| = \sum (-k - \lambda)^{n-m}\sigma_m$$
$$= (\alpha_1 - k - \lambda)(\alpha_2 - k - \lambda) \cdots (\alpha_n - k - \lambda).$$

وصحة النظرية تصبح عندئذ واضحة.

وبما أن k يكون جذرًا مميزًا لـ A مضاعفًا ν مرة إذا، وفقط إذا، كان 0 جذرًا مميزًا لِـ $A - kI$ مضاعفًا ν مرة، فنجد من النتيجة (٢٧ ـ ٢) :

نتيجـة (٢٧ ـ ٤)

إذا كان k جذرًا مميّزًا مضاعفًا v مرة لمصفوفة مربّعة A ، فلا يمكن أن تكون رتبة المصفوفة $A - kI$ أقل من $n - v$.

نبرهن أيضًا:

نظريـة (٢٧ ـ ٥)

إذا كان k عددًا سلّميًا فإن الجـذور المميّزة لِـ kA هي جداء k في الجذور المميّزة لِـ A.

وهذا ينتج من حقيقة أن كل محدّد مصغّر ذي m صفًا من kA هو جداء k^m في المحدّد المصغّر الموافق من A. وهكذا نجد من النظرية (٢٧ ـ ١) أن الدّالة المميّزة لِـ kA هي

$$f_1(\lambda) = |kA - \lambda I| = \sum (-\lambda)^{n-m} k^m \sigma_m.$$

وبالاستناد إلى نتيجة معروفة جيدًا في نظرية المعادلات فإن جذور $f_1(\lambda) = 0$ هي جداء k في جذور $f(\lambda) = 0$.

ويمكن إعطاء برهان بديل كما يلي:

من الـواضح أن النظرية صحيحة إذا كان $k = 0$ ، ذلك لأن الجذور المميّزة للمصفوفة صفر جميعها أصفار. إذا كان $k \neq 0$ فيمكن كتابة الدّالة المميّزة $F(\mu)$ لِـ kA على الشكل $|kA - \mu I| = k^n |A - \frac{\mu}{k} I|$ ، وهي تنعدم إذا، وفقط إذا، كان $\lambda = \frac{\mu}{k}$ حيث λ هو جذر مميّز لِـ A.

لنتذكر من الفقرة **٢٥** أنه إذا كانت A وC مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ، وC غير شاذة فيدعى $B = C^{-1}AC$ التحويل (الكونتراجرادیانت) لِـ A بوساطة C. ومن أجل التحويلات لدينا النظريتان التاليتان.

نظريـة (٢٧ ـ ٦)

تتطابق الدّالة المميّزة لِـ A مع الدالّة المميزة لأي تحويل من تحويلات A.

ذلـك لأنه إذا كان $B = C^{-1}AC$ فنجد من كون $C^{-1}(\lambda I)\,C = \lambda\, C^{-1}C = \lambda I$ أن $B - \lambda I = C^{-1}(A - \lambda I)\,C$. والآن لنـأخـذ محدّد الـطرفـين ملاحـظين أن $|C^{-1}|\,|C| = 1$ (باعتبار أن $C^{-1}C = I$)، فنجد:

$$|B - \lambda I| = |C^{-1}|\;|A - \lambda I|\;|C| \tag{27.3}$$

وينـبغي أن يلاحظ الـطالب أن المحـدّدين $|C^{-1}|$ و $|A - \lambda I|$ في هذه المعـادلـة الأخيرة يتصفان بالإبدالية باعتبارهما عددين سُلَّميين، في حين لا تتصف المصفوفات بالضرورة بخاصة الإبدال.

نظريـة (٢٧ ـ ٧)

لتكن $B = C^{-1}AC$ و Y متّجهًا لا متغـيرًا لِـ B موافقًا للجـذر α . إذا كان $X = CY$ فعندئذ يكون X متّجهًا لا متغيرًا لِـ A موافقًا للجذر α نفسه .

ذلك لأنه لدينا بالفرض $BY = \alpha Y$. ومن كون $AC = CB$ نجد:

$$AX = ACY = CBY = C(\alpha Y) = \alpha X.$$

وهو المطلوب.

٢٨ ـ المصفوفات القطرية

تدعى مصفوفة مربّعة $\underset{n \times n}{D}$ ، جميع عناصرها غير الواقعة في القطر الرئيسي أصفار **بالمصفوفة القطرية**.

مثلاً، المصفوفة الواحدية I والمصفوفة صفر هما مصفوفتان قطريتان، وكذلك المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

وفي الغالب تمثل مصفوفة قطرية D عناصرها القطرية هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ بالرمز

$$D = \text{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n). \tag{28.1}$$

وهكذا نكتب $A = diag\,(3, 2, 1)$ و $B = diag\,(0, 1, 0)$.

نظريـة (٢٨ ـ ١)

الجذور المميّزة لمصفوفة قطرية $D = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ هي، على وجه الدقة، العناصر الموجودة في القطر.

ذلك لأن الدالّة المميّزة لِـ D هي:

$$|D - \lambda I| = (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_2 - \lambda) \cdots (\alpha_n - \lambda). \qquad (28.2)$$

وتمتلك مصفوفة قطرية دائمًا n من المتّجهات اللامتغيرة المستقلة خطّيًا. وفي الحقيقة، من السهل التحقق من أن لمتجهات العمود الـ n التالية:

$$U_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0], U_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0], \ldots, U_n = [0, 0, \ldots, 0, 1]$$

خاصة أنه إذا كانت D هي المصفوفة القطرية في (28.1) فعندئذ:

$$DU_i = \alpha_i U_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (28.3)$$

نظريـة (٢٨ ـ ٢)

لأي مصفوفة A، مشابهة لمصفوفة قطرية، n من المتّجهات اللامتغيّرة (الذاتية) المستقلة خطّيًا، وفي الحقيقة إذا كانت C مصفوفة غير شاذة بحيث إن $C^{-1}AC = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ فإن أعمدة C تكون متّجهات لا متغيرة لِـ A.

لبرهان هذه النظرية نلاحظ أولاً أن $C^{-1}AC = D$، وثانيًا أن المتّجهات U_i، أي أعمدة المصفوفة I، هي متّجهات لا متغيّرة لِـ D. وبالاستناد إلى النظرية (٢٧ ـ ٨)، تكون المتّجهات CU_i، أي أعمدة المصفوفة CI، متّجهات لا متغيّرة لِـ A. وبما أن C غير شاذة فإن هذه المتّجهات الـ n هي بوضوح مستقلة خطّيًا.

نظريـة (٢٨ ـ ٣)

إذا كان لمصفوفة مربّعة $A_{n\times n}$، n من المتّجهات اللامتغيرة المستقلة خطّيًا فعندئذ تكون A مشابهة لمصفوفة قطرية.

لبرهان هذه النظرية، دعنا نفرض أن A تمتلك n من المتّجهات المستقلة خطّيًا $X_1, X_2, \ldots, X_n$ الناشئة عن الجذور المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ على الترتيب، بحيث إن

$$AX_i = \alpha_i X_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{28.4}$$

لنختر هذه الـ n من المتّجهات X_i كأعمدة لمصفوفة غير شاذة C. ووفقًا لـ (28.4) فإن أعمدة المصفوفة AC هي، على وجه الدقة، المتجهات $\alpha_i X_i$. وفضلاً عن ذلك، إذا كان $D = Diag\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$، فمن الواضح أن متجهات العمود للمصفوفة CD هي أيضًا $\alpha_i X_i$. وبالتالي $AC = CD$، وهذا يعني أن

$$C^{-1}AC = D$$

وتنتج صحة هذه النظرية الأخيرة أيضًا من حقيقة أنه إذا اخترنا المتّجهات الـ n، $X_1, X_2, \ldots, X_n$ كأساس لفضاء **المتّجهات الخطّي** Γ_n فإن مركّبات المتّجه X_i بالنسبة للأساس الجديد هي $(1, 0, \ldots, 0)$، $(0, 1, 0, \ldots, 0)$، . . . ، $(0, 0, \ldots, 0, 1)$، ولذلك فإن متّجهات الوحدة هذه هي متّجهات لا متغيّرة للمصفوفة $C^{-1}AC$، وبالتالي فإن هذه المصفوفة الأخيرة قطرية، كما تبيّن بعض الحسابات السهلة.

وبدمج النظريتين الأخيرتين نجد:

نظرية (٢٨ ـ ٤)

تكون مصفوفة مربّعة $A_{n \times n}$ مشابهة لمصفوفة قطرية إذا، وفقط إذا، كان لها n من المتّجهات اللامتغيرة المستقلة خطّيًا.

لتكن الجذور المميّزة المختلفة عن بعضها لـ A هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$، وهي مضاعفة $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مرة على الترتيب $(\Sigma v_i = n)$. بما أن النتيجة (٢٧ ـ ٤) تفيد بأن رتبة $A - \alpha_j I$ لا يمكن أن تكون أقل من $n - v_j$. فنستنتج من النظرية (٢٣ ـ ٢) أنه لا يمكن أن يوجد أكثر من v_j من المتّجهات اللامتغيّرة المستقلة خطّيًا والموافقة للجذر α_j. ولذلك فإنه إذا كانت A مشابهة لمصفوفة قطرية، وبالتالي، ووفقًا للنظرية (٢٨ ـ ٢)، لها n من المتّجهات اللامتغيرة المستقلة خطّيًا، فإن رتبة $A - \alpha_j I$ يجب أن تكون مساوية تمامًا لـ $n - v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$.

لنفــرض، على العكس، أنــه من أجــل أي جذر مميّز α_j مضــاعف v_j مرة تكـون رتبـة المصفـوفـة $A - \alpha_j I$ هي $n - v_j$. فنبيـنِّ الآن أن للمصفوفة A عددًا من المتّجهات الـلامتغيرة المستقلة خطِّيًا يساوي n ، وبالتالي فإنها تكون، وفقًا للنظرية (٢٨ ـ ٣)، مشابهة لمصفوفة قطرية.

لتكن المتّجهات

$$X'_1, \cdots, X'_{v_1};$$
$$X''_1, \cdots, X''_{v_2}; \tag{28.5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X^{(s)}_1, \cdots, X^{(s)}_{v_s}.$$

متّجهـات لا متغيرة لِـ A ، والمتّجهات في الصف j هي الـ v_j من المتّجهات المستقلة خطِّيا المـوافقة للجذر α_j. لدينا هنا $\Sigma v_j = n$ من المتّجهات، وكل ما نحتاج القيام به هو أن نبينّ أنها مستقلة خطِّيًا. ونقـوم بهذا عن طريق الاستقراء. فلنلاحظ أولاً أن المتّجهات $X'_1, X'_2, \ldots, X'_{v_1}$ هي بالفرض مستقلة خطِّيًا. ونفترض من أجل $t \leqslant s$ أن المتّجهات

$$X'_1, \cdots, X'_{v_1}, X''_1, \cdots, X''_{v_2}, \cdots, X^{(t-1)}_1, \cdots, X^{(t-1)}_{v_{t-1}} \tag{28.6}$$

مستقلة خطِّيًا ثم نبينّ أن المتّجهات

$$X'_1, \cdots, X'_{v_1}, \cdots, X^{(t-1)}_1, \cdots, X^{(t-1)}_{v_{t-1}}, X^{(t)}_1, \cdots, X^{(t)}_{v_t} \tag{28.7}$$

مستقلة خطِّيًا.

لنفرض أنه توجد أعداد سلَّمية $c'_1, \ldots, c'_v, \ldots, c^{(t)}_1, \ldots, c^{(t)}_{vt}$ بحيث إن

$$\begin{aligned} c'_1X'_1 + \cdots + c'_{v_1}X'_{v_1} + \cdots + c^{(t-1)}_1X^{(t-1)}_1 + \cdots \\ + c^{(t-1)}_{v_{t-1}}X^{(t-1)}_{v_{t-1}} + \cdots + c^{(t)}_{v_t}X^{(t)}_{v_t} = 0 \end{aligned} \tag{28.8}$$

وفي طرفي المـعـادلـة (28.8) نضرب متّـجـهـات الـعـمـود من الـيسـار بـ $A - \alpha_t I$. فنـجـد عنـدئـذ، وبـاعـتـبـار أن $(A - \alpha_t I)\, X^{(t)}_j = 0$ في حين $(A - \alpha_t I)\, X^{(i)}_j = [(A - \alpha_i I) + (\alpha_i - \alpha_t)I]\, X^{(i)}_j = (\alpha_i - \alpha_t)\, X^{(i)}_j$ نجد أن:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \alpha_t)[c'_1X'_1 + \cdots + c'_{v_1}X'_{v_1}] + \cdots \\ + (\alpha_{t-1} - \alpha_t)[c^{(t-1)}_1X^{(t-1)}_1 + \cdots + c^{(t-1)}_{v_{t-1}}X^{(t-1)}_{v_{t-1}}] = 0 \end{aligned}$$

وبما أن $\alpha_i - \alpha_t \neq 0$ من أجل $i \neq t$ وأن المتّجهات في (28.6) مستقلة خطّيًا بالفرض، فلدينا:

$$c_1' = \cdots = c_{\nu_1}' = \cdots = c_1^{(t-1)} = \cdots = c_{\nu_{t-1}}^{(t-1)} = 0.$$

ومن (28.8) نستنتج عندئذ أن

$$c_1^{(t)} X_1^{(t)} + \cdots + c_{\nu_t}^{(t)} X_{\nu_t}^{(t)} = 0,$$

ومنه، وطالما أن المتّجهات المذكورة في هذه المعادلة الأخيرة مستقلة خطّيًا، نجد

$$c_1^{(t)} = \cdots = c_{\nu_t}^{(t)} = 0.$$

وهـذا يعني أن العلاقة (28.8) تصحّ فقط إذا كانت جميع المقادير c أصفارًا، أي أن المتّجهات مستقلة خطّيًا.

ولدينا الآن النظرية:

نظريـة (٢٨ ـ ٥)

لتكن A مصفـوفـة مربعـة $n \times n$ جذورهـا المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ مضـاعفـة $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ على الترتيب. فالشرط اللازم والكافي لتكون A مشابهة لمصفوفة قطرية هو أن تكون رتبة المصفوفة $A - \alpha_j I$ هي $n - \nu_j$ وذلك من أجل أي جذر α_j.

توضيح: حدِّد أيًّا من المصفوفتين التاليتين مشابهة لمصفوفة قطرية D وأوجد C بحيث إن $C^{-1}AC = D$، في حال وجود C.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

حل I: معادلة A_1 المميّزة هي:

$$|A_1 - \lambda I| = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0,$$

وجذورها هي $1-$، 1 و1. ويوافق الجذر المضاعف 1 المصفوفة $A_1 - I$ ورتبتها الواحد، ونحصل على متّجهين لا متغيرين مستقلين خطّيًا بحل المعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

لنختر المتّجهين $(0, 1, -1)$ و $(1-, 0, 1)$. أما الجذر -1 فتوافقه المصفوفة:

$$A_1 + I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ورتبتها 2، ونحصل على المتّجه الوحيد اللامتغير $(1, 1-, 2)$. وإذا أخذنا:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

فعندئذ يكون $C^{-1}A_1 C = diag\,(1, 1, -1)$.

II. المعادلة المميّزة لِـ A_2 هي

$$|A_2 - \lambda I| = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0,$$

وجذورها هي $1, 1, 3$. ويوافق الجذر المضاعف 1 المصفوفة:

$$A_2 - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ورتبتها 2. ومنه لا تكون A_2 مشابهة لمصفوفة قطرية.

٢٩ ـ الدوّار

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة عناصرها أعداد حقيقية أو مركّبة وليكن $a_{ij} = a_{j-i}$، حيث يُتّفق على أنه من أجل $i > j$ يكون $a_{j-i} = a_{n+j-i}$. فسندعو مثل هذه المصفوفة بالدوّار. ومن الواضح عندئذ أنه يمكن الحصول على كل صف من A بعد الأول بتبديل عناصر الصف السابق بصورة دورانية في اتجاه اليمين وبحيث ينزاح كل عنصر موضعًا واحدًا.

والدوّار الأكثر شمولاً من أجل $n = 4$ هو:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{bmatrix}.$$

ومن الواضح أن المصفوفة صفر والمصفوفة المحايدة I كلاهما دوّار، وكذلك المصفوفة المربّعة التي يتألف كل عنصر فيها من العدد k نفسه .

ليكن ω_t أحد الجذور النونية للواحد الصحيح (أي أن $\omega_t^n = 1$ ، $t = 1, 2, ..., n$) ولنعتبر المتّجه ذي الـ n بُعدًا

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (1, \omega_t, \omega_t^2, \cdots, \omega_t^{n-1}); \tag{29.1}$$

أي أن

$$x_j = \omega_t^{j-1} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

فلدينا عندئذ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{j-i}\omega_t^{j-1} = \omega_t^{i-1} \sum_{j=1}^{n} a_{j-i}\omega_t^{j-i} \tag{29.2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n).$$

لنثبّت i الآن ولنترك j تتغير فوق القيم $1, 2, ..., n$. والمجموع الأخير في (29.2) هو عندئذ :

$$a_{1-i}\omega_t^{1-i} + \cdots + a_{-1}\omega_t^{-1} + a_0\omega_t^0 + a_1\omega_t + \cdots + a_{n-i}\omega_t^{n-i}. \tag{29.3}$$

وبما أن $a_{ji} = a_{n+j-i}$ و $\omega_t^n = 1$ فيمكن كتابة (29.3) على الشكل :

$$a_{n-i+1}\omega_t^{n-i+1} + \cdots + a_{n-1}\omega_t^{n-1} + a_0\omega_t^0 + \cdots + a_{n-i}\omega_t^{n-i}.$$

وهذه العبارة الأخيرة، التي نرى أنها مستقلة عن i ، سنرمز لها بـ α_t. وعندئذ تصبح العلاقة (29.2) من الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \omega_t^{i-1}\alpha_t = \alpha_t x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{29.4}$$

ونستنتج من هذه العلاقة الأخيرة أن كلًّا من المتّجهات الـ n في (29.1) هو متّجه لا متغيّر للدوّار A وينشأ المتّجه $(1, \omega_t, \omega_t^2, ..., \omega_t^{n-1})$ عن الجذر المميّز α_t. وبما أن المصفوفة P ، التي أعمدتها هي المتّجهات اللامتغيّرة (29.1) ، تمثّل منقول مصفوفة

فاندرموند (Vandermond) ، فإن P غير شاذة وفقًا للنظرية (١٣ ـ ١) . وهكذا نستنتج أن الدوّار A مشابه لمصفوفة قطرية .

ومنه نجد النظرية :

نظرية (٢٩ ـ ١)

لتكن $A = (a_{ij}) = a_{j-i}$ دوّارًا مربّعًا $n \times n$ عناصره أعداد حقيقية أو مركبة . إذا كانت ω_t $(t = 1, 2, \ldots, n)$ هي القيم الـ n للجذر النوني للواحد ، فإن الجذور المميّزة لـ A هي :

$$\alpha_t = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_t^k = a_0 + a_1\omega_t + \cdots + a_{n-1}\omega_t^{n-1},$$

ويكون A مشابهًا للمصفوفة القطرية $diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

ولكن أكثر من ذلك ، يتضح من الطريقة التي شكّلنا فيها المصفوفة P ، بحيث تكون $P^{-1}AP$ قطرية ، أن P تعتمد على n ولكنها لا تعتمد على الدوّار A. ولدينا إذن النتيجة :

نتيجة (٢٩ ـ ٢)

لتكن $A, B, C, \ldots$ مصفوفات دوّارة مربعة $n \times n$ عناصرها من الحقل المركّب . فتوجد مصفوفة غير شاذة P ، بحيث إن المصفوفات $P^{-1}AP$ ، $P^{-1}BP$ ، $P^{-1}CP$ ، . . . كلها قطرية .

ولدينا أيضًا

نتيجة (٢٩ ـ ٣)

إذا كانت A مصفوفة دوّارة مربّعة $n \times n$: $a_{ij} = a_{j-i}$ فإن قيمة محدّد A هي

$$|A| = \prod_{t=1}^{n} (a_0 + a_1\omega_t + \cdots + a_{n-1}\omega_t^{n-1}),$$

حيث تتغير ω_t فوق جميع قيم الجذر النوني للواحد الصحيح .

تماريـن

حدِّد ما إذا كانت أي من المصفـوفـات A التـالية مشابهة لمصفوفات قطرية، واحسب C بحيث تكون $C^{-1}AC$ قطرية وذلك في حال وجود C:

١) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

٦) $\begin{bmatrix} -5 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

٨) إذا كانت A و B مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أن A و B متشابهتان. وبحل معادلات خطّية متجانسة معيّنة، أوجد مصفوفة حقيقية غير شاذة C بحيث يكون $AC = CB$.

٩) لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها من حقل $\mathscr{F}$. إذا كان لـ A جذر مميّز يساوي الصفر ومضاعف ν مرة، فيعرف سيلفستر (Sylvester) الفراغية الخاصة بالمصفوفة A بأنها ν . وإذا كانت رتبة A هي r فيعرف سيلفستر (Sylvester) الصفرية الخاصة بـ A على أنها $n - r$. بيِّن أن الصفرية الخاصة بـ A لا يمكن أن تتجاوز فراغيتها. وإذا كانت A مشابهة لمصفوفة قطرية فإن الصفرية تساوي الفراغية.

١٠) إذا كان α جذرًا مميّزًا لمصفوفة غير شاذة A ، فعندئذ $\frac{|A|}{\alpha}$ هو جذر مميّز لـ $adj.\ A$.

١١) بيِّن أنه إذا كانت A دوّارة، فعندئذ A' ، $\bar{A}$ و A^* هي أيضًا دوّارة.

١٢) بيِّن أن دوّارين مربّعين $\underset{n\times n}{A}$ ، $\underset{n\times n}{B}$ يتصفان بخاصة الإبدال.

١٣) لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ بحيث إن

ا) كل $a_{ii} > 0$ ،

ب) كل $a_{ij} \leqslant 0$ ، $i \neq j$.

جـ) المجموع $\sum_{t=1} a_{it}$ لعناصر أي صف أكبر من الصفر.

بيِّن أن $|A| \neq 0$.

١٤) بيِّن أنه إذا كان α جذرًا بسيطًا للمعادلة المميزة لمصفوفة مربعة $\underset{n\times n}{A}$ فعندئذ تكون رتبة $A - \alpha I$ هي $n - 1$. وبالتالي بيِّن أنه إذا كانت جذور المعادلة المميزة كلها متميزة عن بعضها فإن المصفوفة A تكون مشابهة لمصفوفة قطرية.

١٥) إذا كانت A هي الدوّار $\begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}$ فبيِّن بإجراء الضرب عمليًا أن

$|A| = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$ ومنه أثبت المطابقة

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z),$$

حيث ω هي جذر تكعيبي مركب للواحد.

١٦) من أجل كل من الثلاثيات التالية من المصفوفات A, B, C أوجد في حال الإمكان

مصفوفة غير شاذة P ، بحيث تكون $P^{-1}AP$ ، $P^{-1}BP$ ، $P^{-1}CP$ ، في الوقت نفسه، مصفوفات قطرية.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -12 & -12 & 7 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 3 \\ -10 & -8 & 5 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -10 & 1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 3 & -9 \\ 12 & -1 & 6 & -12 \\ 4 & 0 & 1 & -4 \\ 11 & -1 & 3 & -10 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

١٧) بيِّن بوساطة مثال، أنه لكي تكون B مشابهة لِـ A ، لا يكفي أن يكون لِـ A وB الدالّة المميّزة نفسها . (**إرشاد**: خذ $A = I$) .

١٨) لتكن A وB مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ولتكن $C = AB$. إذا كان σ_t هو مجموع عناصر العمود t من A و ρ_t مجموع عناصر الصف t من B فبيِّن أن مجموع كل عناصر C هو

$$\sigma_1\rho_1 + \sigma_2\rho_2 + \sigma_3\rho_3 + \cdots + \sigma_n\rho_n.$$

١٩) من أجل كل من المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تحقق من العلاقة $A^2 = I$ مستخدمًا الاختبار المعطى في التمرين ١٨ .

٢٠) إذا كانت A مصفوفة مربّعة $n \times n$ بحيث إن مجموع العناصر في كل صف هو العدد نفسه $k \neq 0$ ، فبيِّن أن لصفوف $adj.\ A$ الخاصة نفسها. بيِّن أن النتيجة تبقى صحيحة في حالة $k = 0$.

الفصل الثامن

أنواع
خاصة من المصفوفات

٣٠ ـ المصفوفات المتناظرة، المصفوفات مائلة التناظر والمصفوفات الهرميشية

تعريف

*يُقال إنّ مصفوفة A **متناظرة** إذا كانت مساوية لمنقولها، أي إذا كانت $A = A'$ أو $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. ويقال إن A **مائلة التناظر** إذا كانت مساوية لجداء منقولها بـ -1، أي $A = -A'$، أو $a_{ij} = -a_{ij}$، $a_{ii} = 0$، $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.*

وعلى سبيل المثال، المصفوفة صفر والمصفوفة المحايدة I، متناظرتان، وكذلك المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

بينما المصفوفتان

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

مائلتا التناظر.

تعريـف

يُقـال إن المصفـوفة A **هرميشية** *إذا كانت مساوية لمرافق منقولها. أي إذا كان* $A^* = A$ ، أو $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. والمصفوفة الهرميشية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة إلّا أنّ المصفوفات المركّبة (غير الحقيقية) المتناظرة لا يمكن أن تكون هرميشية.

وهكذا فإن:

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2-i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$$

ليست هرميشية.

ملاحظـة

من الـواضـح أن المصفوفات المتناظرة أو مائلة التناظر أو الهرميشية هي حُكْمًا مصفوفات مربّعة. وفضلاً عن ذلك فإن عناصر القطر الرئيس في مصفوفة مائلة التناظر هي حُكْمًا أصفار، في حين أن عناصر القطر الرئيس لمصفوفة هرميشية هي حُكْمًا حقيقية.

ونستنتج مباشرة النظريات التالية:

نظرية (٣٠ ـ ١)

إذا كانت A متناظرة (أو مائلة التناظر) وk أي عدد سلّمي، فعندئذ تكون kA متناظرة (أو مائلة التناظر).

ذلك لأنه إذا كان $a_{ji} = \pm\, a_{ij}$ فعندئذ يكون $ka_{ji} = \pm\, ka_{ij}$.

نظرية (٣٠ ـ ٢)

إذا كانت A هرميشية و k أي عدد حقيقي فإن kA هرميشية أيضًا.

ذلك لأنه إذا كان $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ وكان k حقيقيًّا فعندئذ $(\overline{ka_{ij}}) = k\bar{a}_{ij} = k\bar{a}_{ji}$.

نظرية (٣٠ ـ ٣)

إذا كانت A أي مصفوفة مربّعة وk أي عدد سلّمي فعندئذ تكون $S = k(A + A')$ متناظرة و $T = k(A - A')$ مائلة التناظر.

ذلك لأن $S' = k(A' + A) = S$ و $T' = k(A' - A) = -T$.

نظرية (٣٠ ـ ٤)

إذا كانت A أي مصفوفة مربّعة، حقيقية أو مركّبة، وكان k أي عدد حقيقي فعندئذ تكون $H = k(A + A^*)$ هرميشية.

نظرية (٣٠ ـ ٥)

إذا كانت A مصفوفة مربّعة $m \times m$ متناظرة (أو مائلة التناظر) وكانت P أي مصفوفة $m \times n$، فعندئذ تكون $P'AP$ متناظرة (أو مائلة التناظر) وإذا كانت A هرميشية فعندئذ تكون P^*AP هرميشية.

ذلك لأنه إذا كان $B = P'AP$، فعندئذ $B' = P'A'P = B$ أو $B -$ وفقًا لما إذا كان $A' = A$ أو $A -$. وأيضًا إذا كان $C = P^*AP$ و $A^* = A$، فعندئذ $C^* = C$.

نتيجة (٣٠ ـ ٦)

إذا كانت P أي مصفوفة $m \times n$ فإن $P'P$ متناظرة وP^*P هرميشية.

وهذا ينتج من النظرية (٣٠ ـ ٥) بأخذ $A = I$.

نظرية (٣٠ ـ ٧)

يمكن التعبير، بصورة وحيدة، عن كل مصفوفة مربّعة A كمجموع مصفوفة متناظرة S ومصفوفة مائلة التناظر T.

في الحقيقة، إذا كانت $S = \frac{1}{2}(A + A')$ و $T = \frac{1}{2}(A - A')$، فمن النظرية (٣٠ ـ ٣) نجد أن S متناظرة وT مائلة التناظر، وفضلاً عن ذلك، $A = S + T$. وعلى

العكس، إذا كان $A = S + T$ ، حيث S متناظرة وT مائلة التناظر، فعندئذ $A' = S - T$ ، وبالتالي فإن $S = \frac{1}{2}(A + A')$ و $T = \frac{1}{2}(A - A')$.

نظرية (٣٠ - ٨)

يمكن التعبير، بصورة وحيدة، عن أي مصفوفة مربّعة A على الشكل $A = P + iQ$ حيث إن المصفوفتين P وQ هرميشيتان.

في الحقيقة، إذا أخذنا

$$P = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad Q = \frac{1}{2i}(A - A^*),$$

فمن السهل أن نبيِّن أن P وQ هرميشيتان، ومن الواضح أن $A = P + iQ$. وتُبرهن الوحدانية كما في النظرية السابقة.

نظرية (٣٠ - ٩)

المصفوفة القرينة لمصفوفة متناظرة هي بدورها متناظرة.

ذلك لأنه إذا كان $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ ، حيث M_{ij} هي المصفوفة المصغرة ذات الـ $(n-1)$ صفًّا التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j من A. فلدينا أيضًا $\alpha_{ji} = (-1)^{i+j}|M_{ji}|$ حيث نحصل على M_{ji} بحذف الصف j والعمود i من A أو الصف i والعمود j من A'. وبما أن $A' = A$ فإن $M_{ij} = M_{ji}$ و $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

نظرية (٣٠ - ١٠)

لتكن A مصفوفة مائلة التناظر من المرتبة n. فتكون عندئذ $adj.\ A$ متناظرة أو مائلة التناظر وفقًا لما إذا كان n فرديًا أو زوجيًا.

باستخدام رموز النظرية السابقة، $|M_{ji}|$ هو محدد المصفوفة ذات الـ $(n-1)$ صفًّا التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j من $A' = -A$. ومنه.

$$|M_{ji}| = (-1)^{n-1}|M_{ij}|$$

وبالتالي $\alpha_{ji} = (-1)^{n-1}\alpha_{ij}$.

نظرية (٣٠ - ١١)

قرينة مصفوفة هرميشية هي بدورها مصفوفة هرميشية .

ونبرهن الآن النظرية الأساسيّة التالية :

نظرية (٣٠ - ١٢)

الجذور المميّزة لمصفوفة هرميشية جميعها حقيقية .

برهـان

إذا كان α جذرًا مميّزًا لِـ A فيوجد متّجه عمود غير الصفر $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ بحيث إن

$$AX = \alpha X. \qquad (30.1)$$

وطـرفا (30.1) هما مصفوفتان أو متّجها عمود $n \times 1$. فإذا ضربنا الطرفين على اليسار بالمتّجه الصف أو المصفوفة $\underset{1\times n}{X^*}$ ، نحصل على :

$$X^*AX = \alpha X^*X \qquad (30.2)$$

وطرفا (30.2) هما مصفوفتان 1×1 والعنصر X^*X هو بوضوح حقيقي وغير الصفر. وبما أن $A^* = A$ ، فإننا إذا أخذنا مرافق المنقول للطرفين نجد :

$$X^*AX = \bar{\alpha} X^*X \qquad (30.3)$$

ومنه

$$\bar{\alpha} X^*X = \alpha X^*X,$$

وبما أن $X^*X \neq 0$ فلدينا $\bar{\alpha} = \alpha$ ، أي أن α حقيقي .

تعريـف

يُشار غالبًا إلى المعادلة المميّزة لمصفوفة حقيقية متناظرة بالمعادلة القَرْنية **(secular)** ، باعتبار أن أول من استخدمها هو لابلاس وذلك عند تحديده للاضطرابات القَرْنية في الحركات المدارية للكواكب (1772).

نتيجـة (٣٠ - ١٣)

إن جذور المعادلة القَرْنية جميعها حقيقية .

نظريـة (٣٠ ـ ١٤)

جميع الجذور المميّزة لمصفوفة حقيقية مائلة التناظر هي إما تخيلية بحتة أو صفر.

ويمكن إعطاء برهان هذه النظرية بصورة مشابهة لبرهان النظرية (٣٠ ـ ١٢)، وعلى أي حال فإن النتيجة تتبع أيضًا من حقيقة أنه إذا كانت A حقيقية ومائلة التناظر، فعندئذ يكون iA هرميشيًا. وبالاستناد إلى النظرية (٢٧ ـ ٥) فإن الجذور المميزة للمصفوفة السابقة هي جداء $-i = \frac{1}{i}$ في جذور المصفوفة الأخيرة.

تعريـف

يُقال إن المتّجهين ذوي الـ n بُعدًا $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ متعامدان إذا كان جداؤهما الداخلي صفرًا، أي إذا كان $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum x_iy_i = 0$، أو بدلالة المصفوفات إذا كان $Y'X = X'Y = 0$.

نظريـة (٣٠ ـ ١٥)

يكـون المتّجهان اللامتغيران لمصفوفة متناظرة A الناشئان عن جذرين مميّزين مختلفين متعامدين.

ذلك لأنه إذا فرضنا أن

$$AX = \alpha_1 X,\ AY = \alpha_2 Y,\ (\alpha_1 \neq \alpha_2),$$

فعندئذ لدينا:

$$Y'AX = \alpha_1 Y'X,\ X'AY = \alpha_2 X'Y$$

وبأخذ المنقول لطرفي المعادلة الأخيرة نجد باعتبار أن A متناظرة:

$$Y'AX = \alpha_2 Y'X$$

ومنه $\alpha_1 Y'X = \alpha_2 Y'X$، وبالتالي فإن $Y'X = 0$ باعتبار أن $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

نظريـة (٣٠ ـ ١٦)

المصفوفة مائلة التناظر من مرتبة فردية هي مصفوفة شاذة.

لتكن $\Delta = |A|$. فلدينا عندئذ وباعتبار أن $A' = -A = -I . A$ ، ما يلي :

$$|A'| = \Delta = |-I| . |A| = (-1)^n . \Delta.$$

وإذا كانت n فردية فلدينا $\Delta = -\Delta$ أي $2\Delta = 0$ أو $\Delta = 0$.

نظريـة (٣٠ ـ ١٧)

محدَّد مصفـوفة مائلة التناظر من مرتبة زوجية هو مربّع كامل لكثيرة حدود في عناصر المصفوفة .

النظرية واضحة من أجل $n = 2$. فإذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix},$$

فإن $|A| = a^2$. ولتقديم برهان عن طريق الاستقراء، نفرض أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفة مائلة التناظر مرتبتها زوجية $n - 2 = 2s - 2$ ونبيِّن أنها صحيحة من أجل مصفوفة مائلة التناظر مرتبتها $n = 2s$. لنرمز بـ Δ للمحدّد $|A|$ لمصفوفة مائلة التناظر من مرتبـة $n = 2s$ ، وبـ $|D|$ لمحدّد المصفوفة من مرتبة $n - 2$ التي نحصل عليها بحذف الصفين الأخيرين والعمودين الأخيرين . إذا رمزنا عندئذ بـ α_{ij} للعامل المرافق لـ a_{ij} من Δ فلدينا من النتيجة (١٧ ـ ٤) أن

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = |D| \cdot \Delta. \qquad (30.4)$$

والآن $\alpha_{n-1,n-1}$ و $\alpha_{n,n}$ هما محدّدا مصفوفتين مائلتي التناظر من مرتبة فردية $n - 1$ ، وهي صفـر وفقـًا للنـظرية (٣٠ ـ ١٦) . ولـديـنـا من النـظرية (٣٠ ـ ١٠) أن $\alpha_{n,n-1} = -\alpha_{n-1,n}$. وأخيرًا، وباعتبار أنّ $|D|$ هو محدّد مصفوفة مائلة التناظر من مرتبة زوجية $n - 2$ ، فلدينا بالفرض أن $|D| = f^2$ ، حيث f هي كثيرة حدود في عناصر D.

ولدينا إذن من (30.4):

$$\Delta \cdot f^2 = \alpha_{n-1,n}^2,$$

أي أنّ Δ هو مربّع دالّة نسبية، ومن تعريف المحدّد نعلم أنه كثيرة حدود.

٣١ ـ المصفوفات المتعامدة والواحديّة

تعريـف

تكون مصفوفة P متعامدة إذا كان معكوسها ومنقولها متساويين، أي إذا كان $P^{-1} = P'$. وتكون مصفوفة U واحدية إذا كان معكوسها مساويًا لمرافق منقولها أي إذا كان $U^{-1} = U^*$.

ومن الواضح أن المصفوفة الواحدية الحقيقية هي مصفوفة متعامدة. وعلى أي حال فإن المصفوفة المتعامدة المركبة ليست مصفوفة واحدية.

إن أبسط مثال لمصفوفة متعامدة هو المصفوفة المحايدة I. والمثال المألوف الآخر هو مصفوفة التحويل الدوراني في الهندسة التحليلية المستوية.

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta, \end{aligned} \qquad P = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

ومعظم النظريات المتعلقة بالمصفوفات المتعامدة الحقيقية تسري مع تعديلات منـاسبة إلى مصفوفات واحدية. ومنه، وباعتبار أن معظم التطبيقات في الرياضيّات الابتدائية تحوي مصفوفات متعامدة، فسنُلزم أنفسنا هنا بهذه الأخيرة، ونترك للطالب مناقشة ما يتعلق بالمصفوفات الواحدية.

ونستنتج مباشرة النظرية التالية:

نظريـة (٣١ ـ ١)

معكـوس مصفـوفـة متعـامـدة P هو مصفـوفـة متعـامدة. ذلك لأنه إذا كان $Q = P^{-1}$، فعندئذ $Q^{-1} = P$ و $Q' = (P')' = P$، أيضًا.

نظريـة (٣١ ـ ٢)

تكون مصفوفة $P = (p_{ij})$ متعامدة إذا، وفقط إذا، كانت عناصرها محققة للعلاقات:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n} p_{ti}^2 = 1, && (i = 1, 2, \cdots, n), \\ &\sum_{t=1}^{n} p_{ti}p_{tj} = 0, \quad i \neq j && (i, j = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned} \tag{31.1}$$

ومن خلال برهان هذه النظرية الأخيرة نلاحظ أن الشروط (31.1) مكافئة للشرط :

$$PP' = I \tag{31.2}$$

وكل ما تعرضه الشروط (31.1) هو أنه في مصفوفة متعامدة يكون مجموع مربّعات عناصر أي صف مساويًا للواحد، بينما يكون الجداء الداخلي لأي متّجهي صف متميّزين عن بعضهما البعض مساويًا للصفر. ويسمى مثل هذا الشرط تعامدًا بالنسبة للصفوف.

وإذا استخدمنا دلتا كرونوكر δ_{ij} التي قدمناها في المعادلتين (7.7) و (7.8)، فيمكننا كتابة المعادلات (31.1) بالشكل الأكثر تراصًّا :

$$\sum_{t=1}^{n} p_{it}p_{jt} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{31.1'}$$

نظريـة (٣١ ـ ٣)

تكون مصفوفة P متعامدة إذا، وفقط إذا، كان

$$\sum_{t=1}^{n} p_{ti}p_{tj} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{31.3}$$

وتسمى الشروط (31.3) تعامدًا بالنسبة للأعمدة. وهي تكافيء العلاقة :

$$P'P = I \tag{31.4}$$

وكنتيجة للنظريتين (٣١ ـ ٢) و(٣١ ـ ٣) لدينا ما يلي :

نتيجـة (٣١ ـ ٤)

تكـون المصفوفة P المتعامدة بالنسبة لصفوفها متعامدة أيضًا بالنسبة لأعمدتها والعكس بالعكس.

نظريـة (٣١ ـ ٥)

المحدّد Δ لمصفوفة متعامدة يساوي 1 + أو 1 − .

وينتج هذا من (31.2) أو (31.4) بأخذ محدّدات الطرفين.

نظريـة (٣١ ـ ٦)

جداء مصفوفتين متعامدتين من مرتبة n هو مصفوفة متعامدة .

ذلك لأنه إذا كان $R = PQ$ ، حيث P و Q متعامدتان، فعندئذ :

$$R^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q'P' = R'.$$

تعريـف

نقول إن معادلة جبرية $f(x) = 0$ من الدرجة n هي معادلة قابلة للقلب شريطة أن يكون $f(\lambda) = \pm \lambda^n f(\frac{1}{\lambda})$.

نظريـة (٣١ ـ ٧)

المعادلة المميّزة لمصفوفة متعامدة هي معادلة قابلة للقلب .

لدينا

$$P - \lambda I = P\lambda\left(\frac{1}{\lambda} I - P'\right) = -P\lambda\left(P' - \frac{1}{\lambda} I\right).$$

وبأخذ محدّد الطرفين نجد

$$f(\lambda) = |P - \lambda I| = |P|\,(-\lambda)^n \left|P' - \frac{1}{\lambda} I\right| = \pm\lambda^n \left|P - \frac{1}{\lambda} I\right| = \pm\lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

نظريـة (٣١ ـ ٨)

الجذور المميّزة لمصفوفة متعامدة حقيقية لها قيمة مطلقة تساوي الواحد .

ذلك لأنّه إذا كان α جذرًا مميّزًا لمصفوفة متعامدة حقيقية P ، فيوجد متّجه عمود $X \neq 0$ بحيث إن

$$PX = \alpha X. \tag{31.5}$$

وبأخذ مرافق المنقول لطرفي هذه المعادلة الأخيرة نجد

$$X^* P' = \bar{\alpha} X^* \tag{31.6}$$

وبتشكيل جداء المصفوفة $1 \times n$ في (31.6) بالمصفوفة $n \times 1$ في (31.5) ، نجد

$$X^* P' P X = \alpha\bar{\alpha} X^* X,$$

ومنه، وباعتبار أن $P'P = I,$

$$X^*X = \alpha\bar{\alpha}X^*X$$

وبما أن X^*X مصفوفة 1×1 غير الصفر، فنحصل بعد قسمة الطرفين على X^*X على:

$$\alpha\bar{\alpha} = 1.$$

نتيجـة (٣١ ـ ٩)

ليس لمصفوفة متعامدة حقيقية أية جذور مميّزة حقيقية غير الـ ± 1 .

نظريـة (٣١ ـ ١٠)

إذا كانت T مصفوفة مائلة التناظر وحقيقية وk أي عدد حقيقي غير الصفر، فإن المصفوفة

$$P = (kI + T)^{-1}(kI - T) \tag{31.7}$$

متعامدة.

نلاحظ أولاً أن كلاًّ من المصفوفتين $kI + T$ و $kI - T$ غير شاذة، ومن النظريـة (٣٠ ـ ١٤) نعلم أن المصفوفة الحقيقية مائلة التناظر T لا تمتلك أية جذور مميّزة حقيقية غير الصفر. ومن العلاقة

$$(kI - T)(kI + T) = (kI + T)(kI - T),$$

وبضرب طرفيها من اليمين ومن اليسار بـ $(kI - T)^{-1}$ نجد:

$$(kI + T)\,(kI - T)^{-1} = (kI - T)^{-1}\,(kI + T) \tag{31.8}$$

والآن لدينا من (31.7):

$$P^{-1} = (kI - T)^{-1}(kI + T),$$

و

$$P' = (kI - T')(kI + T')^{-1} = (kI + T)(kI - T)^{-1}.$$

ومن (31.8) نجد أن $P^{-1} = P$ أي أنَّ P متعامدة.

نظريـة (٣١ ـ ١١)

يمكن بناء مصفوفة متعامدة حقيقية P ، مرتبتها n (وبطرق لا نهاية لعددها، في

الحقيقة، إذا كان $n > 2$) بحيث تكون عناصر العمود الأول متناسبة مع أية مجموعة من الأعداد الحقيقية] $X_1 = [x_1, x_2, \ldots, x_n$ ليست جميعها أصفارًا.

إذا كان $\Sigma x_i^2 = 1$ ، نأخذ المجموعة X_1 نفسها كأول عمود من المصفوفة P. وإذا كان $\Sigma x_i^2 = k \neq 1$ نردُّ المجمـوعة X_1 إلى الصيغة الناظمية بالقسمة على $\sqrt{k}$ ، ثم نستخـدم المجمـوعـة النـاتجـة $[(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})]$ كأوّل عمـود من P. ولكي يكون المتّجـه الثـاني العمـود متعـامدًا مع المتّجه الأول العمود يجب أن نختار حلاً حقيقيًا $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ غير الصفر للمعادلة

$$x_{11}y_1 + x_{21}y_2 + \ldots + x_{n1}y_n = 0$$

وإذا كان ضروريًا نردُّ هذه المجمـوعـة إلى الصيغـة النـاظمية بالقسمة على $\sqrt{\Sigma y_i^2}$ ونستخـدم المجموعة الناتجة كعمود ثان من P. ونمضي بهذه الطريقة حتى نحصل على $s \leqslant n - 1$ عمودًا من P

$$.[x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}] \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

وللحصـول على العمود $(s + 1)$ ، نجد حلاً حقيقيًا $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ لمجموعة الـ $s < n$ من المعادلات الخطية المتجانسة:

$$.x_{1i}z_i + x_{2i}z_2 + \ldots + x_{ni}z_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

ومن النتيجة **(٢٣ ـ ٣)** نجد أنّ هذا ممكن دومًا طالما أن $s < n$. ونردُّ المجموعة الناتجة إلى الشكل الناظمي ثم نستخدمها كالعمود $(s + 1)$ من P. وبهذه الطريقة نبني المصفوفة المتعـامـدة الحقيقية المربّعة $\underset{n \times n}{P}$. وينتج تعامد هذه المصفوفة من كونها تحقق شروط النظرية **(٣١ ـ ٣)**، أي أن P متعامدة بالنسبة لأعمدتها.

توضيـح : أقم مصفـوفـة متعامدة حقيقية P عمودها الأول متناسب مع المجموعة $.(1, 2, 3)$

حل: نردُّ المجمـوعة إلى الصيغة الناظمية بالقسمة على $\sqrt{14} = \sqrt{(1^2 + 2^2 + 3^2)}$.

ونستخدم المجموعة $(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$ الناتجة كأول عمود من P. ولإيجاد العمود الثاني نختار حلاً للمعادلة $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$ ، وليكن $(1, 1, -1)$ ثم نردُّه إلى الصيغة الناظمية. وهكذا يمكن أن نأخذ كعمود ثان المجموعة $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. ولإيجاد العمود الثالث من P نحل المعادلتين $z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0$ ، $z_1 + z_2 - z_3 = 0$ ، ونحصل على الحل $(5, -4, 1)$ الذي يصبح بعد ردِّه إلى الصيغة الناظمية:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-4}{\sqrt{42}}, \frac{1}{\sqrt{42}}\right).$$

وهكذا نجد من أجل P المصفوفة

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{42}} \end{bmatrix}.$$

٣٢ ـ الاختزال المتعامد لمصفوفة متناظرة حقيقية إلى شكل قطري

سنبرهن النظرية المهمة التالية.

نظرية (٣٢ ـ ١)

إذا كانت A مصفوفة متناظرة حقيقية مربّعة $n \times n$ جذورها المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ، فتوجد مصفوفة متعامدة حقيقية P بحيث إنّ $P'AP = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

نلاحظ أوّلاً أنه إذا كانت A مصفوفة 1×1 فهي من حينها في شكل قطري. ولكي نمضي وفقًا لطريقة الاستقراء الرياضي، نفترض أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفة مرتبتها $n - 1$ ونبرهن صحتها من أجل مصفوفة مرتبتها n.

بما أن α_1 هو جذر مميّز لـ A فهو جذر حقيقي وفقًا للنظرية (٣٠ ـ ١٢) وبالتالي يوجد متّجه حقيقي $X_1 \neq 0$ بحيث إن

$$AX_1 = \alpha_1 X_1 \tag{32.1}$$

نردُّ الآن هذا المتّجه X_1 إلى الشكل الناظمي ونستخدمه كأوّل عمود $(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$ من مصفوفة متعامدة حقيقية Q. ويمكن إقامة الأعمدة الباقية بطرق كثيرة كما في النظرية (٣١ ـ ١١). وعند تشكيل الجداء $Q'AQ$ نشكّل أولاً الجداء AQ. وبما أن العمود الأول من Q هو المتّجه X_1 الذي يحقّق (32.1) فإن العمود الأول من المصفوفة AQ هو بدقة المتّجه $[\alpha_1 x_{11}, \alpha_1, x_{21}, \ldots, \alpha_1 x_{n1}] = \alpha_1 X_1$. ويتألف العمود الأول من المصفوفة $Q'AQ$ من الجداءات الداخلية للمتّجهات الصف المتتالية في Q' ، أي المتّجهات العمود في Q ، مع المتّجه $\alpha_1 X_1$. ومن النظرية (٣١ ـ ٣) نجد أن العمود الأول من $Q'AQ$ هو $[\alpha_1, 0, \ldots, 0]$ ، أي أن

$$Q'AQ = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right], \qquad (32.2)$$

حيث تشير النجوم في الصف الأول إلى عناصر لم يجر تحديدها بعد، وعلى أي حال، ومن النظرية (٣٠ ـ ٥)، وباعتبار أن A متناظرة وحقيقية وأن Q حقيقية، نجد أن $Q'AQ$ متناظرة حقيقية، وهذا يعني أن كل العناصر المشار إليها بنجوم هي أصفار، وA_1 مصفوفة متناظرة حقيقية من مرتبة $n-1$. وبما أن $Q' = Q^{-1}$ فنجد من النظرية (٢٧ ـ ٦) أن الجذور المميَّزة لِـ $Q'AQ$ هي الجذور المميّزة لِـ A نفسها. وبالتالي فإن الجذور المميَّزة للمصفوفة المتناظرة الحقيقية A_1 ذات الـ $n-1$ صفًّا هي بالضبط $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ ، وتوجد بالفرض مصفوفة R مرتبتها $n-1$ بحيث إن

$$R'A_1R = diag\,(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \qquad (32.3)$$

وإذا كتبنا

$$S = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right], \qquad (32.4)$$

فمن الواضح أن S هي مصفوفة متعامدة حقيقية فيها n صفًّا، والتي يمكن أن نبيِّن من خلال حسابات سهلة أنها تحقِّق المعادلة

$$S'(Q'AQ)S = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline 0 & R'A_1R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & & 0 & \\ \hline & \alpha_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \alpha_n \end{array}\right] \quad (32.5)$$

وإذا أخذنا الآن $P = QS$ ، فنجد من النظرية (٣١ ـ ٦) أن P متعامدة وحقيقية ، ونظرًا لـ (32.3) نكتب :

$$P'AP = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

وهو المطلوب .

ويمكن تحديد المصفوفة المتعامدة P في حالة عددية كما يلي :

ليكن للمصفـوفة المتناظرة الحقيقية من المرتبة n الجذور المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ المضـاعفـة $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t$ مرة على الـترتيب $(\Sigma \nu_i = n)$. فنـلاحظ أولًا من النـظرية (٣٠ ـ ١٥) أن متّجهـين لا متغـيّرين ناشئين عن جذرين مختلفين هما دائمًا متّجهان متعـامدان . وبما أن A مشابهة لمصفوفة قطرية ، فإذا كان α جذرًا مميزًا لـ A مضاعفًا $\nu > 1$ مرة ، فعندئذ تكون رتبة المصفوفة $A - \alpha I$ هي $n - \nu$ (نظرية ٢٨ ـ ٥) . وعلينا فقط أن نبـيِّن أنه يمكن اختيار الـ ν من المتّجهات اللامتغيّرة ، الناشئة عن الجذر α بحيث تكون متعامدة فيما بينها .

ليكن $X_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$ حلًّا حقيقيًّا غير الصفر لمجموعة المعادلات

$$AY = \alpha Y \quad (32.6)$$

ونلحق بالـ $(n - \nu)$ من المعادلات المستقلة خطيًّا في (32.6) المعادلة :

$$Y'X = x_{11}y_1 + x_{21}y_2 + \ldots + x_{n1}y_n = 0 \quad (32.7)$$

بما أن $\nu \geqslant 2$ فلدينـا في (32.6) و (32.7) $(n - 1)$ ، على الأكثر، من المعادلات المستقلة خطيًّا . ولهـا دائـمًا حل حقيقي غير الصفـر $X_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$ متعـامد ، وفقًا لـ (32.7) ، مع X_1 . وإذا مضينا بهذه الطريقة نحصل على $s < \nu$ من المتجهات الحقيقية المتعـامدة فيما بينها $x_1, x_2, \ldots, x_s$ التي تحقّق (32.6). لنلحق بالـ $n - \nu$ من المعادلات المستقلة خطيًّا في (32.6) المعادلات الـ s الإضافية :

$$\begin{array}{l} x_{11}y_1 + x_{21}y_2 + \cdots + x_{n1}y_n = 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{1s}y_1 + x_{2s}y_2 + \cdots + x_{ns}y_n = 0. \end{array} \tag{32.8}$$

فلدينا في (32.6) و (32.8) $n - \nu + s < n$ من المعادلات الخطّية المتجانسة المستقلة خطيًّا. ولها حل X_{s+1} يحقّق (32.6) ومتعامد مع كل من المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_s$. ونستمر بهذه الطريقة حتى نحصل على ν من المتّجهات المتعامدة فيما بينها والناشئة عن الجذر α. وباستخدام كل من الـ s جذرًا α_i نحصل على $\Sigma \nu_i = n$ متّجهًا تستخدم، بعد ردِّها إلى الصيغة الناظمية، كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P المرغوبة وبحيث تكون $P'AP$ مصفوفة قطرية.

توضيح: إذا كانت A مصفوفة حقيقية متناظرة

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

فأوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث تكون $P'AP$ قطرية.

حلّ: المعادلة المميّزة لِـ A هي

$$\lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$$

وجذورها هي $4, -2, -2$. ومن أجل الجذر 4 نحل المعادلتين الخطّيتين $-5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ و $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$ ونحصل على المتّجه اللامتغير، الوحيد $(1, -2, 1)$. ومن أجل الجذر المضاعف -2 نحل المعادلة الوحيدة

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \tag{32.9}$$

وبالتجربة نجد أن $(1, 1, 1)$ هو حل. وللحصول على حل آخر لِـ (32.9) متعامد مع الأول، نلحق بِـ (32.9) المعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{32.10}$$

ومن (32.9) و (32.10) نحصل على الحل $(1, 0, -1)$. ونردُّ المتّجهات اللامتغيّرة الثلاثة التي حصلنا عليها هكذا إلى الصيغة الناظمية ونستخدمها كأعمدة للمصفوفة المتعامدة P المرغوبة. وهكذا إذا أخذنا

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

فمن السهل التحقق من أن $P'AP = diag\,(4, -2, -2)$.

ولا تصح النظرية (٣٢ ـ ١) من أجل مصفوفات متناظرة مركبة. فإذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

فإن الجذور المميّزة هي 1 ، 1 ، ولكن رتبة $A - I$ هي الواحد، وهذا يعني أن A لا تمتلك متّجهين لا متغيّرين.

٣٣ ـ التكافؤ الواحدي

لتكن U مصفوفة مربّعة $n \times n$ تقع عناصرها u_{ij} في حقل الأعداد المركّبة. فنتذكر من الفقرة **٣١** أن U تدعى مصفوفة واحدية إذا كان معكوسها مساويًا لمرافق منقولها، أي إذا كان

$$U^{-1} = U^*$$

ومن الواضح أن مصفوفة واحدية حقيقية هي مصفوفة متعامدة، ولكن مصفوفة متعامدة تخيلية لا تكون مصفوفة واحدية.

من السهل البرهان على أن العديد من خواص المصفوفات المتعامدة الحقيقية التي أوردناها في الفقرة **٣١** تبقى سارية المفعول، بعد تعديلات ملائمة، من أجل المصفوفات الواحدية. وسنترك البراهين كتمرين للطالب.

إذا كانت A وB مصفوفتين مربّعتين عناصرهما من الحقل المركّب. وكانت U مصفوفة واحدية بحيث إن

$$U^* A U = B,$$

فسنقول: إن A مكافيء واحدي لِـ B ونكتب

$$A \overset{U}{=} B.$$

٣٤ ـ الصيغة القانونية لجاكوبي (Jacobi) (*)

تعريـف

تدعى المصفوفة المربّعة التي تحوي فوق (أو تحت) القطر الرئيس أصفارًا فقط مصفوفة مثلثة.

مثلاً، المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مثلثة.

وسنبرهن الآن النظرية:

نظريـة (٣٤ ـ ١)

إذا كانت A أي مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها من حقل الأعداد المركّبة، فتوجد مصفوفة واحدية U بحيث تكون $U^* A U$ مصفوفة مثلثة.

نبرهن هذه النظرية بالاستقراء على n. ونلاحظ قبل كل شيء أن المصفوفة (a_{11}) التي تحوي عنصرًا واحدًا هي من حينها مصفوفة مثلثة. والآن نفرض أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفة مربّعة $(n - 1) \times (n - 1)$ ثم نبرهن صحتها من أجل مصفوفة مربّعة $n \times n$.

ليكن α_1 جذرًا مميّزًا لِـ A. فيوجد عندئذ متّجه عمود

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

بحيث إن

$$AX = \alpha_1 X$$

وعند الضرورة نردُّ هذا المتّجه X إلى الصيغة الناظمية بقسمة كل من مركّباته على

(*) Carl Gustav Jacob Jacobi, (1810 - 1851).

$\sqrt{\sum x_i \bar{x}_i}$ ، ونستخدم المتّجه الناتج كأول عمود من المصفوفة الواحدية V. ويمكن ملء الأعمدة الباقية بعدة طرق إذا كان $n > 2$. ومن السهل أن نبيِّن، كما في الفقرة ٣٢، أن V^*AV من الشكل

$$C = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right], \tag{34.1}$$

حيث تشير الرموز x في الصف الأول إلى أعداد مركّبة لم تُحدَّد بعد، وA_1 مصفوفة مربّعة $(n-1) \times (n-1)$. ومن الفرض الاستقرائي توجد مصفوفة W مربّعة $(n-1) \times (n-1)$ ، واحدية بحيث إن

$$W^*A_1W = \begin{bmatrix} \alpha_2 & z & z & \cdots & z \\ & \alpha_3 & z & \cdots & z \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & z \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

وحيث الكميات z فوق القطر هي أعداد مركّبة غير محدّدة.

ومن الواضح أن المصفوفة $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مربّعة $n \times n$ واحدية. ومن السهل، فضلاً عن ذلك، أن نتحقق بمساعدة (34.1) من أن

$$\begin{aligned} Z^*CZ = Z^*V^*AVZ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & z \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & x \\ 0 & W^*A_1W \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

(*) Jacobi, Carl Gustav Jacob (1810 - 1851).

أي أن

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \alpha_1 & x & \cdots & x \\ \ddots & \alpha_2 & \cdots & x \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdot \\ & & \alpha_{n-1} & x \\ & & \ddots & \alpha_n \end{bmatrix}, \tag{34.2}$$

حيث $U = VZ$. وبما أن V وZ واحديتان، فإن جداءهما U مصفوفة واحدية أيضًا. وهو المطلوب.

إن المصفوفة المثلثة في الطرف الأيمن من (34.2) هي صيغة جاكوبي (Jacobi) القانونية. ومن الواضح أن الجذور المميّزة لمصفوفة مثلثة هي العناصر القطرية $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ، وبما أن التحويل U^*AU هو تحويل تشابه، فإن المقادير α هي الجذور المميزة لِـ A أيضًا.

٣٥ ـ المصفوفات الناظمية

تعريف

نقول إن مصفوفة مربّعة $\underset{n\times n}{A}$ ، عناصرها تقع في حقل الأعداد المركّبة، إنها مصفوفة ناظمية إذا اتصفت بخاصية الإبدال مع مرافق منقولها، أي إذا كان $AA^* = A^*A$.

ومن الواضح أن كل مصفوفة A تمتلك خاصة إمكانية التعبير عن A^* ككثيرة حدود في A هي مصفوفة ناظمية. وهكذا تكون المصفوفات الهرميشية $(A^* = A)$ ناظمية، وكذلك المصفوفات الواحدية $(U^* = U^{-1})$ والمصفوفات المتعامدة.

نظرية (٣٥ ـ ١)

إذا كانت A مصفوفة ناظمية وU مصفوفة واحدية، فعندئذ تكون $B = U^*AU$ ناظمية.

ذلك لأن $B^* = U^*A^*U$ ، وبالتالي

$$B^*B = U^*A^*U \,.\, U^*AU = U^*A^*AU$$
$$= U^*AA^*U = U^*AU \,.\, U^*A^*U = BB^*.$$

ونعبِّر عن هذا بقولنا إن خاصة كون مصفوفة ناظمية هي خاصة لا متغيرة واحديًا.

نظريـة (٣٥ - ٢)

تكون مصفوفة مربّعة $A_{n\times n}$ مكافئة واحديًا لمصفوفة قطرية إذا، وفقط إذا، كانت A ناظمية.

وبالاستناد إلى النظرية (٣٤ - ١) يمكن أن نأخذ A على الشكل:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & b_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}, \qquad (35.1)$$

باعتبار أن B تكون ناظمية إذا، وفقط إذا، كانت A كذلك. والآن العنصر في الصف الأول والعمود الأول من B^*B هو $\bar{\alpha}_1\alpha_1$ ، في حين أن العنصر الموافق من BB^* هو

$$\bar{\alpha}_1\alpha_1 + b_{12}\bar{b}_{12} + b_{13}\bar{b}_{13} + \ldots + b_{1n}\bar{b}_{1n}$$

وتتساوى هاتان العبارتان فقط إذا كان $\sum_{i=2}^{n} b_{1i}\bar{b}_{1i} = 0$. والآن كل حد في الجمع أكبر أو يساوي الصفر، ويمكن للمجموع أن يساوي الصفر فقط إذا كان $b_{1i} = 0\ (i = 2, 3, \ldots, n)$. وبصورة مشابهة يتساوى العنصران في الموضع (2,2) من B^*B و BB^* فقط إذا كان $b_{23} = b_{24} = \ldots = b_{2n} = 0$. وبالاستمرار بهذه الطريقة نبرهن أن كل $b_{ij}\ (i \neq j)$ في B تساوي الصفر أي أن B مصفوفة قطرية. وعلى العكس إذا كانت B مصفوفة قطرية فمن الواضح أنها ناظمية، طالما أن أي مصفوفتين قطريتين تتصفان بخاصة الإبدال.

لتكن A مصفوفة هرميشية جذورها المميّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ، ولتكن U مصفوفة واحدية بحيث إن

$$U^*AU = B = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad (35.2)$$

وبما أن A هرميشية. فكذلك أيضًا B. ومنه $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ ، أي أن α_i حقيقي.

نتيجـة (٣٥ - ٣)

جميع الجذور المميّزة لمصفوفة هرميشية هي جذور حقيقية.

إذا كانت A في (35.2) واحدية، فتكون B عندئذ واحدية أيضًا. ولدينا في هذه الحالة، من العلاقة $B^* B = I$:

$$diag\,(\alpha_1\bar{\alpha}_1, \alpha_2\bar{\alpha}_2, \ldots, \alpha_n\bar{\alpha}_n) = diag\,(1, 1, \ldots, 1)$$

وبالتالي

$$\alpha_i\bar{\alpha}_i = 1, (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{35.3}$$

وبـالعكس، إذا كانت B مصفـوفة ناظمية جذورها المميزة α_i تحقق (35.3) ، فنستنتج أن $B^* B = I$ أي أن B ، وبالتالي A ، واحدية. ولذلك يمكننا الحصول على النتيجة التالية:

نتيجـة (٣٥ - ٤)

مقياس الجذور المميّزة لمصفوفة واحدية هو الواحد، وعلى العكس، أي مصفوفة ناظمية يكون لجميع جذورها المميّزة مقياس مساو للواحد هي مصفوفة واحدية.

تماريـن

بينّ أن كلًّا من المصفوفات التالية متعامدة

١) $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} -6/7 & 2/7 & 3/7 \\ 2/7 & -3/7 & 6/7 \\ 3/7 & 6/7 & 2/7 \end{bmatrix}$

٥) $1/9\begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 \\ 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

٦) $1/2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

من أجل كل من المصفوفات المتناظرة الحقيقية A التالية، أوجد مصفوفة متعامدة P بحيث تكون $P'AP$ قطرية

٧) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

٨) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -6 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

١٠) $\begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 2 & -9 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

١١) بيِّن أن الجذور المميزة لمصفوفة متناظرة حقيقية A تكون جميعها متساوية إذا، وفقط إذا، كانت A عددًا سلَّميًّا.

١٢) إذا كانت $P = (p_{ij})$ مصفوفة حقيقية متعامدة 3×3 ومحدّدها $+1$، فبيِّن أن $p_{11} + p_{22} + p_{33} \geqslant -1$. ضع وبرهن عبارة مماثلة من أجل الحالة التي يكون فيها المحدّد مساويًا -1. (Amer. Math. Monthly, Vol. 43, 1936, pp. 582-3).

١٣) إذا كانت P مصفوفة متعامدة حقيقية لا تملك الـ -1 كجذر مميّز، فبيِّن أنه توجُد مصفوفة حقيقية مائلة التناظر T بحيث تكون P معطاة بالعلاقة (31.7).

١٤) في العلاقة (31.7) خذ

$$T = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

وأوجد علاقة من أجل المصفوفات المتعامدة 3×3. بيِّن أن المتّجه (a, b, c) هو متّجه لا متغيّر، إطلاقًا بالنسبة لكل مصفوفة منها.

١٥) بيِّن أنه إذا كان الـ $1 -$ جذرًا مميّزًا للمصفوفة الحقيقية المتعامدة P مضاعفًا ν مرة، فإن $|P| = (-1)^{\nu}$.

١٦) إذا كانت P مصفوفة حقيقية متعامدة وكان X متّجهًا لا متغيّرًا لـ P ناشئًا عن جذر مميّز $\alpha \neq \pm 1$، فعندئذ $X'X = 0$.

١٧) أيّ مصفوفة دوّارة A (فقرة ٢٩) هي مصفوفة ناظمية.

١٨) تكون مصفوفة مربّعة $\underset{n \times n}{A}$ ناظمية إذا، وفقط إذا، أمكن التعبير عن A^* ككثيرة حدود سلّمية في A.

١٩) إذا رمزنا بـ A و B لمصفوفتين مربّعتين فوق حقل الأعداد المركّبة وكانت $C = AB - BA$ فاختبر تناظر C تحت الشروط: (1) كل من A و B متناظرة، (2) كل من A و B مائلة التناظر و (3) A متناظرة، B مائلة التناظر.

٢٠) إذا كانت a ، b ، c ، d أربعة أعداد حقيقية بحيث إن $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ، فبيِّن أن المصفوفتين التاليتين متعامدتان:

$$P = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 - c^2 + d^2 & 2(ab - cd) & 2(ac + bd) \\ 2(ab + cd) & -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 & 2(bc - ad) \\ 2(ac - bd) & 2(bc + ad) & -a^2 - b^2 + c^2 + d^2 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

٢١) بيِّن أن المصفوفة المتناظرة غير الشاذة تكون متطابقة مع عكسها.

٢٢) لتكن D المصفوفة القطرية $diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$ حيث المقادير α أعداد حقيقية موجبة. بيِّن أن أعم مصفوفة مربعة X تحقّق الشرط $X'X = D$ معطاة بالعلاقة $X = D^{1/2}P$ ، حيث $D^{1/2} = diag\,(\alpha_1^{1/2}, \ldots, \alpha_r^{1/2}, 0, \ldots, 0)$ و P أي مصفوفة حقيقية متعامدة.

٢٣) إذا كانت A مصفوفة مربّعة $n \times n$ حقيقية فبيِّن أن أعم مصفوفة مربّعة حقيقية X بحيث إن $XX' = AA'$ معطاة بالعلاقة $X = AP$ ، حيث P أي مصفوفة حقيقية متعامدة.

٢٤) إذا كانت J المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ فبيِّن أن المصفوفة $\underset{2\times 2}{X}$ تحقِّق المعادلة $X'JX = J$ إذا، وفقط إذا، كان $|X| = 1$.

٢٥) إذا كانت H مصفوفة هرميشية، وk أي عدد حقيقي غير الصفر، فبيِّن أن

$$V = (kI + iH)\,(kI - iH)^{-1}$$

هي مصفوفة واحدية.

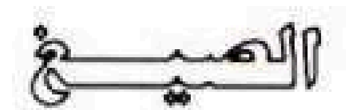
٢٦) لتكن T مصفوفة 6×6 مائلة التناظر

$$\begin{bmatrix} 0 & h & g & l & a & x \\ -h & 0 & f & m & b & y \\ -g & -f & 0 & n & c & z \\ -l & -m & -n & 0 & d & u \\ -a & -b & -c & -d & 0 & v \\ -x & -y & -z & -u & -v & 0 \end{bmatrix}.$$

احسب محدّدًا بخمسة صفوف واستخدم الفقرة ٣٠ لإيجاد كثيرة الحدود φ بحيث إن $|T| = \varphi^2$.



الفصل التاسع



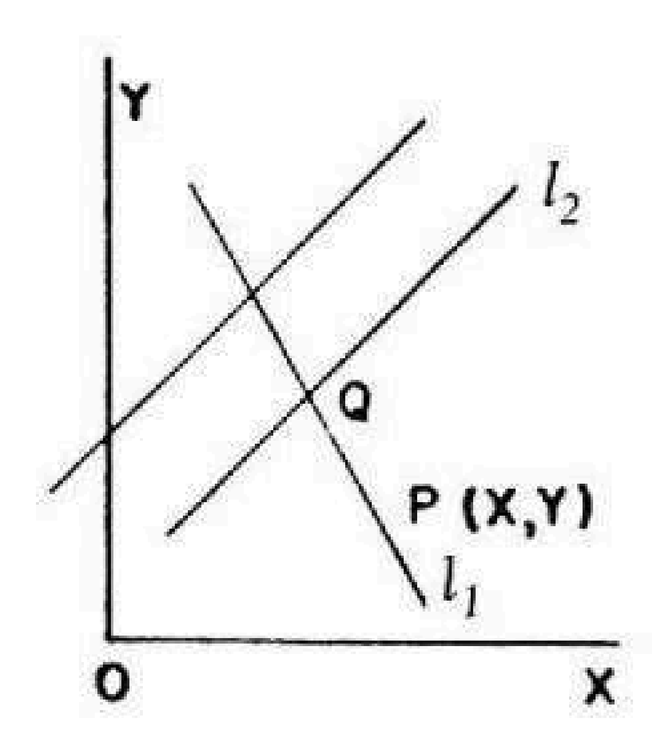
الصيغ ثنائيّة الخطيّة

٣٦ ـ مقدمة هندسية

لتكن x و y إحداثيات كارتيزية عاديّة لنقطة P في مستوى، وذلك بالنسبة لزوج من المحاور المتعامدة. إذا كانت a_1 ، b_1 وc_1 أعدادًا حقيقية مثبتة، وa_1 ، b_1 لا يساويان الصفر معًا، فعندئذ تقع مجموعة كل النقاط الحقيقية $P(x, y)$ التي تحقّق

$$l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (36.1)$$

على خط مستقيم l_1. وتدعى المعادلة (36.1) معادلة الخط l_1 في الإحداثيات الكارتيزية.



وإذا كانت

$$l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (36.2)$$

هي معادلة خط ثان l_2 ، وكان $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، محدّد المعاملات، غير الصفر، فإن الخطّين l_1 و l_2 غير متوازيين وبالتالي يتقاطعان في نقطة وحيدة Q. وعلى أي حال، إذا كان $\Delta = 0$ في حين أن رتبة المصفوفة $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ تساوي 2 ، فيكون الخطان

متـوازيين، ولكنهما غير متطابقين، وبالتالي فليس بينهما أية نقطة مشتركة. وهذه هي الحال، مثلاً، مع الزوج

$$2x - y - 5 = 0 \text{ و } 4x - 2y + 7 = 0 \qquad (36.3)$$

ومع عدم وجود أي نقطة مشتركة بين هذين الخطين، إلّا أنهما يمتلكان شيئًا ما مشتركًا، ألاو هو الاتجاه، وهذه، على وجه الدقة، هي الحقيقة التي نريد جلاءها.

لتكن الثلاثية من الأعداد (x, y, t) ليست جميعها أصفارًا. ومن أجل $t \neq 0$ سنتفق على أن الثلاثية تمثل النقطة P التي إحداثياها الكارتيزيان $(x/t, y/t)$. ويتضح من هذا أن المهم ليست الأعـداد x, y, t لذاتهـا وإنـما نسبها فقط. وهكذا تمثل $(3, 2, -1)$ و $(-6, -4, 2)$ النقطة $(-3, -2)$ نفسها. وسنشير إلى هاتين الثلاثيّتين كإحداثيات كارتيزية متجانسة للنقطة $(-3, -2)$.

ووفق هذه الرموز الجديدة تصبح معادلتا الخطين في (36.3):

$$2x - y - 5t = 0, 4x - 2y + 7t = 0$$

عند حلّ هذا الزوج من المعادلات الخطّية المتجانسة من أجل x، y وt وفقًا للفقرة **٢٣**، نحصل على الحل $(x, y, t) = (k, 2k, 0)$. ولا توجد نقطة منتهية في المستوى موافقة لهذه الثـلاثية. وسنشـير، على أي حال، لهذه الثـلاثية كإحـداثيات نقطة في اللانهاية أو إحـداثيات النقـطة المثالية، في اتجاه الخط الواصل بين المبدأ والنقطة (1,2). ويتضح بالتجربة أن النقطة $(k, 2k, 0)$ تقع على كل خط في نظام الخطوط المتوازية

$$2x - y + ct = 0 \qquad (36.4)$$

وتحقق مجموعة كل النقاط $(x, y, 0)$ التي يكون إحداثيها الثالث صفرًا، المعادلة $t = 0$. وبما أن هذه الأخيرة معادلة من الدرجة الأولى فسندعو المحل الهندسي المعرَّف بها خطًا، الخط عنـد الـلانهاية في المستوى. وتتقاطع عائلة الخطوط المتوازية في (36.4) جميعها مع الخط $t = 0$ في النقطة نفسها عند اللانهاية وهي $(1, 2, 0)$. وهكذا فإنه توجد نقطة واحدة عند اللانهاية من أجل كل اتجاه في المستوى.

وفي الإحداثيات المتجانسة تكون معادلة الخط l_1 في (36.1). هي

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1t = 0$$

وندعو ثلاثية الأعداد (a_1, b_1, c_1) التي نفترض أن واحدًا منها على الأقل يختلف عن الصفر، إحداثيات بلاكر (Plücker) المتجانسة للخط l_1 . ومن الواضح أن أي ثلاثية من الأعداد، ليست جميعها أصفارًا، يمكن أن تستخدم كإحداثيات خط، كما يتضح أن المهم هنا هو النسب فقط . وهكذا فإن $(6, -3, -15)$ و $(-4, 2, 10)$ هي إحداثيات متجانسة للخط $2x - y - 5t = 0$.

وبدلاً من كتابة (x, y, t) و (a, b, t) كإحداثيات نقطة P من خط l ، على الترتيب، فسنأخذ، من أجل الانتظام في مسألة الرموز (x_1, x_2, x_3) و (u_1, u_2, u_3) كإحداثيات نقطة وخط . ومعادلة الخط l هي عندئذ:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

وللعودة إلى معادلة الخط في الإحداثيات الكارتيزية، نختار إحدى الإحداثيات x_1 ، x_2 و x_3 لتكون t ، في حين يكون الإحداثيان الباقيان x و y . وبما أنه يمكن القيام بهذا الاختيار بأكثر من طريقة، فمن الواضح أن المعادلة المعطاة في x_3 ، x_2 ، x_1 يمكن ألا تقود إلى معادلة وحيدة في الإحداثيات الكارتيزية . والملاحظة حول المعادلة تبقى صحيحة أيضًا إذا كان المحل الهندسي من درجة أعلى من الواحد . فمثلاً، المعادلة

$$x_1^2 = 4x_2x_3$$

تقود إلى $y^2 = 4x$ إذا أخذنا $x_1 = y$ ، $x_2 = x$ و $x_3 = t$ (وعندئذ نضع $t = 1$) في حين تقود المعادلة نفسها إلى $4\,xy = 1$ إذا أخذنا $x_1 = t$ ، $x_2 = x$ و $x_3 = y$. ونعبر عن هذه الحقيقة بقولنا: إننا نحصل من المعادلة على محلات هندسية مختلفة عن طريق إسقاط خطوط مختلفة إلى اللانهاية.

وبطريقة مشابهة، نأخذ (x_1, x_2, x_3, x_4) و (u_1, u_2, u_3, u_4) كإحداثيات متجانسة لنقطة P ومستوي π في فضاء ذي ثلاثة أبعاد . وبصورة مشابهة سندعو $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ إحداثيات متجانسة لنقطة P و $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ إحداثيات متجانسة لفوق مستوي π في فضاءات ذي $(n - 1)$ بُعدًا، هذا بالرغم من أنه من أجل $n > 4$ ، لا يكون للمحل الهندسي المذكور هنا أي صورة هندسية مناسبة في فضاء يتفق والبديهة . ويُفهم،

بالطبع، أنه يجب ألا تكون جميع العناصر في أي من المجموعتين مساوية للصفر. وشرط وقوع النقطة P ، عندئذ، في فوق المستوي π هو

$$u_1x_1 + u_2x_2 + \ldots + u_nx_n = 0$$

وإذا فسّرنا مركّبات متّجه عمود $X = [x, x_2, \ldots, x_n]$ ، ليست جميع إحداثياته أصفارًا، كإحداثيات متجانسة لنقطة في فضاء ذي $(n - 1)$ بعدًا، وكانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ غير شاذة، فيُبرهن في الهندسة الإسقاطية أنه (من أجل $n = 2, 3, 4$) يمكن تفسير معادلة المصفوفات

$$Y = AX$$

كتحويل إسقاطي، وبما أنّ المتّجه X والمتّجه $\alpha X = [\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n]$ يمثلان، من أجل $\alpha \neq 0$ ، النقطة نفسها، فمن الواضح أن المتّجه $X \neq 0$ المحقق للعلاقة

$$AX = \alpha X, \quad (\alpha \neq 0),$$

يمثل نقطة ثابتة تحت التحويل.

إذا كانت $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ ، حيث $Y \neq \alpha X$ ، نقطتين متميزتين، وكان λ و μ عددين سلّميين، لا يساويان الصفر معًا، فيُبرهن في الهندسة الإسقاطية على أن

$$\lambda X + \mu Y = [\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n]$$

هي نقطة على الخط XY ، وباختيار مناسب لِـ λ و μ يمكن جعلها ممثلة لأي نقطة على هذا الخط.

ومن السهل أن نبين أنه إذا كانت X و Y نقطتين مثبتتين من التحويل $Y = AX$ موافقتين للجذر المميّز نفسه α ، فعندئذ تكون كل نقطة من الخط XY هي نقطة مثبتة من التحويل الموافق للجذر α .

٣٧ - الصيغ ثنائيّة الخطّية

تعريف

تدعى كثيرة حدود متجانسة في واحد، إثنين، . . . ، أو n من المتغيرات صيغة.

وتصنّف الصيغ: أولاً، وفقًا لعدد المتغيّرات المحتواة، وحيدة، ثنائية، ثلاثية، . . . ،

نونية؛ وثـانيًا، وفقًـا للدرجـة، كخطّي، تربيعي، تكعيبي، . . .، من الدرجة p. وهكذا تكون العبارة $2x - y + 4z$ صيغة خطّية ثلاثية و$5x^2 - 7xy + 6y^2$ صيغة تربيعية ثنائية . . . إلخ.

تعريـف

تدعى عبـارة خطّية ومتجانسة في كل من مجموعتين من المتغيّرات $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$، $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ صيغة ثنائية خطّية.

مثلاً، من أجل $m = 2$ و $n = 3$، تكون العبارة

$$x_1u_1 + 2x_1u_2 - x_1u_3 - 5x_2u_1 + 17x_2u_2 + 4x_2u_3$$

صيغة ثنائيّة خطّية في مجموعتي المتغيّرات (x_1, x_2)، (u_1, u_2, u_3).

ويمكن كتابة أعم صيغة ثنائيّة خطيّة في $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ و $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$\begin{aligned} f(x, u) = & \ a_{11}x_1u_1 + a_{12}x_1u_2 + \cdots + a_{1n}x_1u_n \\ & + a_{21}x_2u_1 + a_{22}x_2u_2 + \cdots + a_{2n}x_2u_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{m1}x_mu_1 + a_{m2}x_mu_2 + \cdots + a_{mn}x_mu_n \\ = & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iu_j, \end{aligned} \tag{37.1}$$

حيث نفترض أن a_{ij} عناصر من حقل ما $\mathscr{F}$.

تعريـف

تدعى المصفوفة $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, m$ ، $j = 1, \ldots, n)$ للمعاملات كما نراها في (37.1) مصفوفة الصيغة الثنائية الخطّية $f(x, u)$. وتدعى رتبة هذه المصفوفة r رتبة الصيغة.

لتكن $X = [x_1, \ldots, x_m]$ مصفـوفة من عمود واحد $m \times 1$ و $U = [u_1, \ldots, u_n]$ مصفوفة من عمود واحد $n \times 1$. فيمكن عندئذ كتابة الصيغة الثنائية الخطّية $f(x, u)$ في (37.1) كمصفوفة من عنصر واحد:

$$f(x, u) = X'AU. \tag{37.2}$$

وينبغي ملاحظة أن مجموعتي المتغيّرات x و u في (37.1) مستقلتان. وهكذا يمكن إخضاع المقادير x لتحويل واحد في حين تبقى المقادير u كما هي، أو أنها تخضع لتحويل مختلف كليًّا.

ولنستبدل الآن m من المتغيّرات الجديدة $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ بالمتغيّرات x، وذلك بوساطة تحويل خطّي متجانس مصفوفته B أي

$$x_i = \sum_{t=1}^{m} b_{it} y_t \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

كما نضع بدلاً من المتغيّرات u، n من المتغيّرات الجديدة $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وذلك بوساطة تحويل مصفوفته C.

$$u_i = \sum_{t=1}^{n} c_{it} v_t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

أي نضع

$$X = BY, \quad U = CV \tag{37.3}$$

حيث X وY متّجها عمود في كل منهما m مركبة، U وV متّجها عمود في كل منهما n مركبة، في حين أن B وC مصفوفتان مربّعتان من المرتبتين m وn على الترتيب. ولدينا عندئذ من (37.2) الصيغة الثنائيّة الخطّية:

$$Y'(B'AC)V \tag{37.4}$$

في المتغيّرات الجديدة y و v والمصفوفة $B'AC$.

نظريـة (٣٧ - ١)

في الصيغـة الثنـائية الخـطّية $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i u_j = X'AU$ التي مصفـوفتها A، إذا أخضعنـا المتغـيّرات x إلى تحويل مصفـوفتـه B $(X = BY)$ والمتغـيّرات u إلى تحويل مصفوفته C $(U = CV)$، فنحصل على صيغة ثنائية خطّية مصفوفتها $B'AC$.

وكنتيجة مباشرة من هذه النظرية لدينا:

نتيجـة (٣٧ - ٢)

لا تتغير رتبة صيغة ثنائيّة خطّية تحت تحويلات غير شاذة للمتغيّرات.

ونتذكر من النظرية (١٥ ـ ١) أنه إذا كانت رتبة مصفوفة $\underset{m \times n}{A}$ ، عناصرها من حقل $\mathscr{F}$ ، مساوية لـ r ، فيمكننا إيجاد مصفوفتين مربعتين غير شاذتين P وQ رتبتاهما m وn ، على الترتيب، وعناصرهما من $\mathscr{F}$. بحيث إن :

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{37.5}$$

وإذا اخترنا عندئذ مصفوفتي التحويلات B وC المذكورتين في (37.3) على أنهما التحويلان P' وQ ، على الترتيب، فسيكون للصيغة الثنائيّة الخطّية الناتجة المصفوفة الموجودة في الطرف الأيمن من (37.5).

نظريـة (٣٧ ـ ٣)

لتكن $f(x, u) = X'AU$ صيغة ثنائية خطّية عناصر مصفوفتها A من حقل $\mathscr{F}$. إذا كانت رتبة A مساوية لِـ r ، فبوساطة تحويلات غير شاذة وعناصرها من $\mathscr{F}$ ، لهذه المتغيّرات، يمكننا ردّ $f(x, u)$ إلى الصيغة القانونية :

$$y_1v_1 + y_2v_2 + \ldots + y_rv_r$$

تعريـف

يُقال: إن صيغة ثنائيّة خطّية $f(x, u) = \Sigma a_{ij}x_iu_j$ هي صيغة قابلة للتحليل إلى عوامـل إذا أمكن التعبـير عنها كجداء صيغة خطّية في المقادير x في صيغة خطّية في المقادير u.

ونبرهن النظرية التالية :

نظريـة (٣٧ ـ ٤)

الشرط اللازم والكافي لتكون الصيغة الثنائيّة الخطّية $f(x, u)$ قابلة للتحليل إلى عوامل هو أن تكون رتبة الصيغة مساوية للواحد.

نستثني الحالة التافهة حيث تكون الرتبة صفرًا، باعتبار أنه لا توجد عمليًا في مثل هذه الحالة أية صيغة ثنائية خطّية. ونفرض أولاً أن الصيغة قابلة للتحليل إلى عوامل بحيث يكون

$$\sum \sum a_{ij}x_iu_j \equiv (\sum c_ix_i)(\sum d_ju_j) \equiv \sum \sum c_id_jx_iu_j,$$

حيث لا تكون جميع المقادير c أو جميع المقادير d أصفارًا. وبما أن هذه العلاقة الأخيرة مطابقة في جميع المتغيرات، فلدينا

$$a_{ij} = c_id_j \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

ومن الواضح أن كل محدّد من المرتبة الثانية من A ينعدم، أي أن:

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_id_j & c_id_l \\ c_kd_j & c_kd_l \end{vmatrix} = 0.$$

ومنه، باعتبار أن المقادير a_{ij}، بالفرض، لا تساوي جميعها الصفر، فإن رتبة المصفوفة A هي الواحد.

وعلى العكس لنفرض أن رتبة الصيغة الثنائية الخطّية هي الواحد. فعندئذ وبالاستناد إلى النظرية (٣٧ - ٣) يمكن تحويل $f(x, u)$ بتحويلات غير شاذة إلى الصيغة القانونية y_1v_1. وعكس هذه التحويلات

$$y_i = \sum k_{ij}x_j, \quad v_i = \sum l_{ij}u_j$$

يعيد y_1v_1 إلى $f(x, u)$. أي أن:

$$(\sum k_{1j}x_j)\,(\sum l_{1j}u_j) \equiv f(x, u) \tag{37.6}$$

وبالتالي فإن $f(x, u)$ قابلة للتحليل إلى عوامل.

ولكن أكثر من ذلك، إذا وقعت المعاملات a_{ij} في $f(x, u)$ في الحقل $\mathscr{F}$، فبالاستناد إلى النظرية (٣٧ - ٣) تقع معاملات التحويلات أيضًا في $\mathscr{F}$. ومنه نجد النتيجة:

نتيجة (٣٧ - ٥)

إذا كانت الصيغة الثنائية الخطّية $\sum a_{ij}x_iu_j$، التي تقع معاملاتها في حقل $\mathscr{F}$، قابلة للتحليل إلى عوامل، فتوجد عوامل معاملاتها واقعة أيضًا في $\mathscr{F}$.

وسنفترض في هذا الفصل من الآن فصاعدًا أن $m = n$، أي أن عدد المتغيرات x يساوي عدد المتغيرات u. وتكون عندئذ مصفوفة الصيغة الثنائية الخطّية مربّعة.

تعريـف

إذا كانت لدينا مجموعتان $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ في كل منهما n من المتغـيّرات، وكـانت المتغـيّرات بحيث إننـا إذا أخضعنـا u إلى تحويل معـيّن $(U = CV)$ ، فإن المتغيّرات x تخضع إلى التحويل نفسه $(X = CY)$ ، فنقول عندئذ إن المجموعتين من المتغيّرات تُحوَّلان كوجراديانتيًّا (Cogrediently).

تعريـف

إذا كانت A وC مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ، وC غير شاذة، فتدعى المصفوفة $C'AC$ التحـويل الكـوجـراديانتي Cogredient لِـ A بوساطة C. ونقول إن المصفوفتين A و$C'AC$ متطابقتان.

ونبرهن مباشرة النظرية التالية:

نظريـة (٣٧ - ٦)

تحت التحـويلين الكوجراديانتيين لِـ X وU : $X = CY$ ، $U = CV$ ، تتحول الصيغة ثنائية الخطّية $X'AU$ ذات المصفوفة A إلى صيغة ثنائيّة الخطّية مصفوفتها $C'AC$.

لنعتبر الآن الصيغة ثنائيّة الخطيّة الخاصة:

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n,$$

التي مصفـوفتهـا I. إذا أخضعنـا المتغـيرات x إلى تحويل $X = BY$ مصفـوفتـه B ، والمتغـيّرات u إلى تحويل $U = CV$ مصفـوفتـه C. فتكـون مصفـوفـة الصيغـة النـاتجة $B'C$ وإذا كانت مصفـوفـة الصيغـة الجـديدة I ، فعنـدئـذ يتحـول $f(x, u)$ إلى $f(y, v) = \sum y_i v_i = y_1v_1 + y_2v_2 + \ldots + y_nv_n$ ، أي أنها تتحول إلى نفسها، كما يُقال. وستكون الحالة كذلك إذا، وفقط إذا، كانت مصفوفتا التحويل B وC محققتين للعلاقة $B'C = I$ ، أي أن $B' = C^{-1}$ أو $B = (C^{-1})'$. وتحت هذه الشروط نقول إن المتغيّرات x وu قد حُوِّلت لاجراديانتيًّا (Contragredienty).

تعريف

لتكن المجموعتان $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ كل منهما بـ n من المتغيّرات. وإذا حدث أنه عندما نُخضع إحدى المجموعتين إلى تحويل غير شاذ مصفوفته C ، تخضع المجموعة الأخرى إلى تحويل مصفوفته هي منقول معكوس C ، فإننا نقول عندئذ: إن المجموعتين من المتغيّرات تحوّلان لاجراديانتيًّا.

نظرية (٣٧ - ٧)

تتحول الصيغة الثنائيّة الخطّية $\Sigma x_i u_i$ إلى نفسها إذا، وفقط إذا، حُوِّلت المجموعتان لاجراديانتيًّا.

وبالعودة الآن إلى الصيغة الثنائيّة الخطّية $X'AU = \sum_i^n \sum_j^n a_{ij} x_i u_j$ في مجموعتين من المتغيّرات في كل منهما n متغيراً، وإخضاع المتغيّرات u إلى التحويل $U = CV$ ، والمتغيّرات x إلى التحويل اللاجراديانتي (Contragredient) $X = (C^{-1})'Y$ ، فنرى أن مصفوفة الصيغة الناتجة هي $C^{-1}AC$. وهذه الحقائق تبرر المصطلحات التي استخدمناها عند دعوة المصفوفة الأخيرة التحويل اللاجراديانتي لِـ A بوساطة C .

الفصل العاشر

الصيغ التربيعيّة

٣٨ ـ الصيغ التربيعيّة بصورة عامة

الصيغة التربيعية العامة بِـ n من المتغيّرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي عبارة من النوع

$$\begin{aligned} f(x) \equiv \sum \sum a_{ij}x_ix_j \equiv a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2, \quad (a_{ij} = a_{ji}) \end{aligned} \tag{38.1}$$

ونفترض أن المعاملات a_{ij} هي عناصر من حقل ما $\mathscr{F}$ ، كما نفترض أن المتغيرات x تتصف بخاصة الإبدال مع المعاملات a ومع بعضها البعض. وتحظى حالتان خاصتان بالاهتمام (١) عندما يكون $\mathscr{F}$ هو حقل جميع الأعداد المركّبة و(٢) عندما يكون $\mathscr{F}$ حقل جميع الأعداد الحقيقية. وفي هذه الحالة الأخيرة نتكلم عن f كصيغة تربيعية حقيقية.

تعريف

تدعى المصفوفة المتناظرة $A = (a_{ij})$ للعبارة المكتوبة في (38.1) مصفوفة الصيغة التربيعية $f(x)$. ويدعى المحدّد $|A|$ مميّز الصيغة. وتدعى r ، رتبة A ، رتبة الصيغة. وإذا كان $r < n$ قلنا: إن الصيغة شاذة.

إذا أخذنا $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ كمصفوفة من عمود واحد، فيمكن كتابة الصيغة $f(x)$ في (38.1) كمصفوفة 1×1:

$$f(x) = X'AX \tag{38.2}$$

والآن إذا طبّقنا على المتغيرات تحويلاً مصفوفته C_n :

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{38.3}$$

أو إذا كتبنا بدلالة المصفوفات :

$$X = CY$$

فإننا نحصل مباشرة من (38.2) على الصيغة التربيعية المحوَّلة :

$$Y' (C'AC)\, Y,$$

التي تحوي المتغيّرات الجديدة $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ولكن بمصفوفة هي $C'AC$. وهكذا نجد النظرية .

نظريـة (٣٨ ـ ١)

إذا طبّقنا على المتغيّرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في صيغة تربيعيّة $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ مصفوفتها A ، التحـويل الخـطّي (38.3) ذا المصفـوفة C ، فإننا نحصل على صيغة تربيعيّة جديدة مصفوفتها $C'AC$.

نتيجـة (٣٨ ـ ٢)

لا تتغيّر رتبة الصيغة التربيعية تحت تحويلات خطّية غير شاذة مطبقة على المتغيّرات .

ملاحظـة

من الملائم، مع أنه غير ضروري، أن نكتب المصفوفة A للصيغة التربيعية في (38.1) كمصفوفة متناظرة . وقد نتفق، مثلاً، على أن نأخذ A على شكل مصفوفة مثلثة حيث $a_{ij} = 0$ $(i > j)$. وهكـذا يمكننا كتابة مصفوفة الصيغة $\varphi = 2x_1x_2$ التي تحوي متغـيرين، وبـدون أي لبس، على الشكل $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ بدلاً من الشكل المتناظر $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. وإذا طبقنا الآن على متغيري φ_1 التحويل غير الشاذ

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2$$

فإننا نحصل على صيغة $2y_1^2 - 2y_2^2$ ، رتبة مصفوفتها $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ تســاوي 2 ، في حين كانت رتبـة المصفـوفة A_1 مساوية للواحد. وهكذا يبدو أن النتيجة (٣٨ ـ ٢) لا تصح هنا. وفضلاً عن ذلك، ومع أن A قد أُخذت كمصفوفة مثلثة، فقد لا تكون $C'AC$ مثلثة بالضرورة ما لم نتخذ تبسيطات إضافية.

٣٩ ـ اختصار الصيغة التربيعيّة إلى عبارة تحوي حدودًا مربّعة فقط

لتكن الصيغة التربيعية $f = \Sigma\, a_{ij}x_ix_j = X'AX$ مصفوفتها A . فقد تعلمنا في الفقرة **٣٢** أنه إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الجذور المميّزة لِـ A ، فتوجد مصفوفة حقيقية متعامدة P بحيث إن

$$P'AP = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

وإذا طبّقنا الآن على المتغيّرات x تحويلاً مصفوفته P ، أي إذا وضعنا $X = PY$ ، فإن الصيغة المفروضة تحوّل إلى

$$\alpha_1^2 y_1^2 + \alpha_2^2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 y_n^2 \qquad (39.1)$$

تعريـف

يدعى التحويل المتجانس الخطّي

$X = PY$ أي ، $x_i = \Sigma p_{ij}y_j$

الذي تكون مصفوفته P متعامدة بالتحويل المتعامد.

ونجد عندئذ النظرية:

نظريـة (٣٩ ـ ١)

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الجـذور المميّزة (جميعهـا حقيقية) للمصفـوفـة المتنـاظرة الحقيقية A ، فيوجـد تحويل حقيقي متعـامد $X = PY$ تتحول بوساطته الصيغة التربيعية $f(x) = \Sigma\, a_{ij}x_ix_j$ إلى الصيغة القانونية $\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$.

توضيـح: لتكن الصيغة التربيعية

$$\begin{aligned} f(x) = & -x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 \\ & -2x_2x_1 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 \\ & + x_3x_1 - 2x_3x_2 - x_3^2, \end{aligned}$$

مصفوفتها هي المصفوفة الحقيقية المتناظرة المذكورة في الفقرة ٣٢. فمن السهل التحقق من أنه تحت التحويل الحقيقي المتعامد:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \\ x_2 &= -\frac{2}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \end{aligned}$$

يتحول الشكل $f(x)$ إلى:

$$4y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2.$$

والتحويل المذكور في النظرية (٣٩ ـ ١) هو عادة تحويل غير نسبي كما في التوضيح. وفضلا عن ذلك فإنها لا تنطبق بالضرورة على صيغ معاملاتها مركبة، فمثلاً إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

فإن كلاً من الجذرين المميّزين هو صفر، أي أن العبارة القانونية (39.1) ستتطابق مع الصفر. وفي الفقرة التالية سنعطي طريقة للاختزال تعود إلى لاكرانج (Lagrange) ولا تخضع لأي من الانتقادين السابقين، وهي وفقًا لكلمات جاندلفينكر (Gundelfinger)، «فيما يتعلق باللباقة لا تترك من مزيد.»

٤٠ ـ طريقة لاجرانج (Lagrange) لتحويل صيغة تربيعيّة إلى عبارة تحوي حدودًا مربّعة فقط

لتكن الصيغة التربيعية $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$، معاملاتها a_{ij} أعداد حقيقية أو مركبة. ونفرض أولاً أن f تحوي على الأقل حدًّا مربّعًا واحدًا $a_{ii}x_i^2$، أي أن المصفوفة A تحوي

على الأقل عنصرًا قطريًّا واحدًا a_{tt} مختلفًا عن الصفر. ونبيِّن حدود f التي تحوي x_t في المخطط

$$\begin{array}{ccccc} & & a_{1t}x_1x_t & & \\ & & \vdots & & \\ a_{t1}x_tx_1 & \cdots & a_{tt}x_t^2 & \cdots & a_{tn}x_tx_n, \\ & & \vdots & & \\ & & a_{nt}x_nx_t & & \end{array}$$

من السهل أن نرى من هذا المخطط أن

$$\frac{\partial f}{\partial x_t} = (a_{t1} + a_{1t})x_1 + \cdots + 2a_{tt}x_t + \cdots + (a_{tn} + a_{nt})x_n = 2\sum_{j=1}^{n} a_{tj}x_j.$$

وهكذا يكون من السهل أيضًا تبيان أن الفرق

$$f_1 = f(x) - \frac{1}{a_{tt}}(a_{t1}x_1 + \cdots + a_{tt}x_t + \cdots + a_{tn}x_n)^2 \qquad (40.1)$$

لا يحوي x_t طالما أن $\frac{\partial f_1}{\partial x_t} = 0$. أي أنه يمكن كتابة (40.1) على الشكل:

$$f(x) = \frac{1}{a_{tt}}(\sum a_{tj}x_j)^2 + f_1(x_1, \cdots, x_{t-1}, x_{t+1}, \cdots, x_n). \qquad (40.2)$$

لنطبِّق الآن التحويل غير الشاذ:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{t1}x_1 + \cdots + a_{tt}x_t + \cdots + a_{tn}x_n \\ x_2' &= \qquad x_2 \\ x_t' &= x_1 \\ x_n' &= \qquad\qquad x_n. \end{aligned} \qquad (40.3)$$

وتحت هذا التحويل يصبح f على الشكل:

$$\frac{1}{a_{tt}}x_1'^2 + f_1(x_2', \cdots, x_n'), \qquad (40.4)$$

حيث f_1 إما أن يكون مطابقا للصفر أو صيغة تربيعيّة في $(n - 1)$ من المتغيّرات على الأكثر. وفي الحالة الأولى يكون اختزال الصيغة التربيعية المعطاة تامًّا. وفي الحالة الأخيرة، وعلى فرض أن معامل حد تربيعي واحد على الأقل مختلف عن الصفر،

فيمكن، عن طريق تحويل غير شاذ على المتغيرات $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ، تخفيض f_1 إلى عبارة من النوع

$$\frac{1}{a_{kk}} x_2''^2 + f_2(x_3'', \cdots, x_n''), \tag{40.5}$$

حيث تكون f_2 إما مطابقة للصفر، أو أنها صيغة في $n-2$ من المتغيرات على الأكثر. وبإضافة المعادلة

$$x_1'' = x_1',$$

يمكن النظر إلى هذا التحويل الأخير كتحويل غير شاذ في n من المتغيّرات.

ويمكن أن تستمر هذه الطريقة في فصل الحدود المربّعة طالما احتوى الباقي f_r حدًّا مربّعًا واحدًا على الأقل معامله غير الصفر. وعلى أي حال، إذا كان f_r غير مطابق للصفر، ولكنه لا يحوي أي حد من الشكل $a_{ii}x_i^2$ فإن الطريقة تفشل. ويمكننا عندئذ القيام بما يلي. لنعد إلى الصيغة الأصلية f ولنفرض أن كل $a_{ii} = 0$ ، ولكن $a_{1t} \neq 0$ ، ونبرر لأنفسنا مثل هذا الفرض باعتبار أنه إذا كان $a_{1t} = 0$ فسوف لا يحوي f المتغير x_1 على الإطلاق. والآن نطبّق التحويل الذي يعبّر عن المتغيرات القديمة بدلالة المتغيرات الجديدة.

$$x_i = x_i' \quad (i \neq t) \tag{40.6}$$

$$x_t = x_1' + x_t'$$

ومن الواضح أن المصفوفة C في هذا التحويل الأخير هي مصفوفة تحويل أولي، وأن المصفوفة $C'AC$ تنتج من A بأن نضيف أولاً العمود t إلى العمود الأول ثم نضيف في المصفوفة الناتجة الصف t إلى الصف الأول. وعندئذ ستحوي مصفوفة الصيغة الناتجة العنصر $2a_{1t}$ الذي لا يساوي الصفر في الموضع (١ , ١) ويمكننا تطبيق طريقة لاجرانج (Lagrange).

وربما حصلنا، بعد فصل r من الحدود المربّعة، على باقٍ يطابق الصفر. وليس من الضروري عندئذ أن نقوم بأي تخفيض إضافي. وبما أن رتبة الصيغة التي لا تحوي إلا حدودًا مربعة فقط هي بالضبط عدد المعاملات التي لا تساوي الصفر فلدينا وفقًا للنتيجة (٣٨ ـ ٢) ما يلي:

نظريـة (٤٠ ـ ١)

لتكن $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ صيغة تربيعية رتبتها r ومعاملاتها من حقل $\mathscr{F}$. فيمكننا دائمًا إيجاد تحويل غير شاذ معاملاته من $\mathscr{F}$ بحيث يتحول $f(x)$ إلى عبارة من النوع

$$c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \dots + c_ry_r^2. \qquad (40.7)$$

حيث المقادير c_i هي عناصر من الحقل $\mathscr{F}$ ولا تساوي أي c_i القيمة صفرًا .

ونحصل على التحويل النهائي الذي يتحول بموجبه $f(x)$ إلى الصيغة القانونية (40.7) بتركيب التحـويلات المتتالية من النوعين (40.3) و (40.6). وينبغي أن يلاحظ الطالب أننا نعبِّر في (40.3) عن المتغيّرات الجديدة بدلالة المتغيرات القديمة، في حين نعبر في (40.1) عن المتغيّرات القديمة بدلالة المتغيّرات الجديدة .

لنفرض الآن أن $\mathscr{F}$ هو حقل يتصف بأنه إذا كان c_i عنصرًا من $\mathscr{F}$ فإن $\sqrt{c_i}$ هو أيضًا عنصر من $\mathscr{F}$ ، مثلاً، حقل الأعداد المركّبة . فيمكننا عندئذ تطبيق التحويل التالي

$$\begin{aligned} y_i &= \sqrt{\frac{k_i}{c_i}}\, y_i' \qquad (i = 1, 2, \cdots, r) \qquad (k_i \neq 0), \\ y_i &= y_i' \qquad\qquad (i = r + 1, \cdots, n). \end{aligned} \qquad (40.8)$$

وتحت هذا التحويل يتحول (40.7) إلى

$$k_1y_1'^2 + k_2y_2'^2 + \dots + k_ry_r'^2 \qquad (40.9)$$

نظريـة (٤٠ ـ ٢)

يمكن تخفيض كل صيغـة تربيعية رتبتهـا r ومعـاملاتها من الحقل المركّب $\mathscr{C}$ بوساطة تحويل غير شاذ إلى عبارة من النوع (40.9) حيث المقادير k هي أعداد مركبة كيفية، جميعها غير الصفر.

وبصورة خاصة يمكن أخذ جميع المقادير k في (40.9) مساوية لِـ 1 + .

نظريـة (٤٠ ـ ٣)

يمكن تخفيض كل صيغة تربيعية رتبتها r ومعاملاتها من الحقل المركّب بوساطة تحويل غير شاذ ومعاملاته من الحقل المركّب $\mathscr{C}$ نفسه، إلى الصيغة القانونية

$$y_1'^2 + y_2'^2 + \ldots + y_r'^2 \tag{40.10}$$

ولدينا مباشرة النتيجة :

نتيجـة (٤٠ - ٤)

لتكن الصيغتان التربيعيتان $f = \sum a_{ij}x_ix_j$ و $h = \sum b_{ij}x_ix_j$ معاملاتها من الحقل المركب $\mathscr{C}$ ، فالشرط اللازم والكافي لوجود تحويل خطّي غير شاذ يحوّل f إلى h هو أن يكون للصيغتين الرتبة r نفسها .

نستنتج ضرورة الشرط من حقيقة أن الرتبة لا تتغير تحت تحويلات غير شاذة . ونستنتج الكفاية من حقيقة أنه إذا كان لـ f و h الرتبة r نفسها فيمكن تحويل كل منهما إلى الصيغـة القانونية (40.10) نفسها، ومن ثَمَّ إحداهما إلى الأخرى، وذلك بوساطة تحويلات غير شاذة .

توضيـح : نستخدم طريقة لاجرانج (Lagrange) لردّ الصيغة التربيعيّة في الفقرة السابقة إلى الصيغة القانونية :

$$\begin{aligned} f(x) \equiv & -x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 \\ & - 2x_2x_1 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 \\ & + x_3x_1 - 2x_2x_3 - x_3^2. \end{aligned} \tag{40.11}$$

هنا $\alpha_{11} = -1$ ، لذا تصبح المعادلة (40.2):

$$f(x) = -(-x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + f_1(x_2, x_3)$$

حيث

$$f_1(x_2, x_3) = 6x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_2$$

وبصــورة مشـابهـة $f_1(x_2, x_3) = \frac{1}{6}(6x_2 - 4x_3)^2 - \frac{8}{3}x_3^2$ ، بحيث نجـد $f(x) \equiv -(-x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{6}(6x_2 - 4x_3)^2 - \frac{8}{3}x_3^2$ ، وإذا كتبنا :

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 &= \quad\quad\;\; 6x_2 - 4x_3 \\ y_3 &= \quad\quad\quad\quad\quad\;\; x_3, \end{aligned} \tag{40.12}$$

فنجد تحويلاً غير شاذ يتحول بوساطته $f(x)$ إلى الصيغة القانونية

$$-y_1^2 + \tfrac{1}{6}y_2^2 - \tfrac{8}{3}y_3^2. \qquad (40.13)$$

ملاحظة

ينبغي تحذير الطالب من أنه إذا كانت A مصفوفة الصيغة في (40.11) ، C مصفوفة التحويل في (40.12) ، و $D = diag\,(-1, \frac{1}{6}, \frac{-8}{3})$ مصفوفة الصيغة القانونية في (40.13) ، فليس صحيحًا عندئذ أن $C'AC = D$ ، كما قد يُخَيَّل له من النظرية (٣٨ ـ ١) . وسبب ذلك هو أنه في (40.12) عبّرنا عن المتغيّرات الجديدة بدلالة القديمة وليس القديمة بدلالة الجديدة كما تنص عليه النظرية (٣٨ ـ ١) . وعلى أية حال، فمن السهل التحقق أن $C'DC = A$.

٤١ ـ تحليل الصيغة التربيعية إلى عوامل

تعريف

نقول إن صيغة تربيعية $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ معاملاتها في حقل $\mathcal{F}$ ، قابلة للتحليل إلى عوامل إذا استطعنا التعبير عنها كجداء صيغتين خطيتين معاملاتهما في $\mathcal{F}$ أو في توسيع للحقل $\mathcal{F}$.

مثلاً، الصيغة التربيعية

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 - 5x_1x_2 + 3x_1x_3 + 5x_2x_3 \qquad (41.1)$$

قابلة للتحليل إلى عوامل، وفي الحقيقة من السهل التحقق من أن

$$f(x) = (2x_1 + x_2 - x_3)\,(x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

ونبرهن الآن النظرية:

نظرية (٤١ ـ ١)

تكون صيغة تربيعية قابلة للتحليل إلى عوامل إذا، وفقط إذا، لم تكن رتبة الصيغة أكبر من 2.

نفرض أولاً أن الصيغة قابلة للتحليل إلى عوامل بحيث إن

$$f(x) = (c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)(d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n) \qquad (41.2)$$

فتنشأ حالتان :

حالـة I: العاملان متناسبان . وعندئذ يمكن كتابة (41.2) على الشكل :

$$f(x) = k(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)^2, \qquad (k \neq 0)$$

وإذا لم تكن c_t في هذه المعادلة الأخيرة مساوية للصفر، نقوم بالتحويل غير الشاذ

$$y_i = x_i \quad (i \neq t)$$

$$y_t = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_tx_t + \dots + c_nx_n$$

وتحت هذا التحويل يصبح $f(x)$ على الشكل ky_t^2 ، ومن الواضح أن رتبة هذه الصيغة هي الواحد . وبالتالي فإن رتبة الصيغة الأصلية هي الواحد وفقًا للنظرية (٣٨ ـ ٢) .

حالـة II: العاملان الخطّيان غير متناسبين . وهذا يعني أن واحدًا على الأقل من المحدّدات من المرتبة الثانية للمصفوفة :

$$\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_k & \cdots & c_l & \cdots & c_n \\ d_1 & \cdots & d_k & \cdots & d_l & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

يختلف عن الصفر . وإذا كان

$$\begin{vmatrix} c_k & c_l \\ d_k & d_l \end{vmatrix} \neq 0$$

فنطبِّق التحويل غير الشاذ

$$y_i = x_i, \qquad (i \neq k, i \neq l)$$

$$y_k = c_1x_1 + \cdots + c_kx_k + \cdots + c_lx_l + \cdots + c_nx_n$$

$$y_l = d_1x_1 + \cdots + d_kx_k + \cdots + d_lx_l + \cdots + d_nx_n.$$

ويصبح $f(x)$ تحت هذا التحويل y_ky_l وهو من الرتبة 2. أي أن $f(x)$ من الرتبة 2.

وعلى العكس، لتكن $f(x)$ صيغة تربيعية رتبتها واحد أو اثنان ومعاملاتها من حقل $\mathscr{F}$. فيمكننا عندئذ، بالاستناد إلى النظرية (40.1) ، إيجاد تحويل غير شاذ معاملاته من $\mathscr{F}$. وبحيث يتحول f إلى $c_1y_1^2$ أو إلى $c_1y_1^2 + c_2y_2^2$ وذلك في الحالتين المذكورتين، على الترتيب . ويمكن تحليل كل من الصيغتين إلى عوامل علمًا بأن

معاملات العوامل في الحالة الأخيرة لا تقع بالضرورة في $\mathscr{F}$. وإذا كان

$$y_i = \sum d_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

هو التحويل الذي تتحول بوساطته الصيغ الأخيرة إلى $f(x)$ فمن الواضح أن المعاملات d_{ij} هي عناصر من $\mathscr{F}$ ، بحيث نجد في حالة كون رتبة الصيغة مساوية للواحد :

$$f(x) = c_1 (d_{11} x_1 + \ldots + d_{1n} x_n)^2.$$

وبذلك لا نكون قد برهنا النظرية (٤١ ـ ١) فحسب وإنما أيضًا النظرية التالية :

نظريـة (٤١ ـ ٢)

يمكن دائمًا التعبير عن صيغة تربيعية رتبتها الواحد ومعاملاتها في حقل $\mathscr{F}$ كجداء عنصر من $\mathscr{F}$ في مربّع صيغة خطّية معاملاتها من $\mathscr{F}$.

توضيـح : من الواضح أن رتبة الصيغة :

$$\begin{aligned} f(x) = {} & 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_2 \\ & - 4x_2x_1 + 8x_2^2 - 12x_2x_3 \\ & + 6x_3x_1 - 12x_3x_2 + 18x_3^2 \end{aligned}$$

التي تقع معاملاتها في حقل الأعداد المركبة، هي الواحد. وباستخدام طريقة لاجرانج (Lagrange) نجد :

$$f(x) - \tfrac{1}{2}(2x_1 - 4x_2 + 6x_3)^2 \equiv 0,$$

أي أن $f(x)$ هو جداء عدد مركّب في مربّع صيغة خطّية معاملاتها مركّبة. وقد نلاحظ عند هذه النقطة فرقًا بين الصيغة ثنائية الخطّية والصيغة التربيعيّة، ونقصد أنه بينما تكون الأولى قابلة للتحليل إلى عوامل فقط عندما تكون رتبتها مساوية للواحد، فإن الثانية تقبل التحليل إلى عوامل إذا كانت رتبتها واحدًا أو اثنين. وعلى أي حال، فبينما يكون لكل من الصيغة ثنائيّة الخطّية أو الصيغة التربيعيّة ذات الرتبة 1 والتي معاملاتها من $\mathscr{F}$ عوامل خطّية معاملاتها من $\mathscr{F}$ أيضًا، فليس من الضروري أن يكون لصيغة تربيعية رتبتهـا 2 ومعـامـلاتها من $\mathscr{F}$ عوامل خطّية معاملاتها من $\mathscr{F}$ ، مثلاً الصيغة $x_1^2 + x_2^2$ بمعاملات حقيقية.

الفصل الحادي عشر

الصيغ
التربيعيّة الحقيقيّة

٤٢ ـ مقدمة

سندرس في هذا الفصل الصيغ التربيعية التي تكون معاملاتها أعدادًا حقيقية، وتحت تحويلات حقيقية بدورها. وسنشير إلى مثل هذه الصيغ بالصيغ التربيعية الحقيقية. وهي الصيغ ذات الأهمية الرئيسة في الهندسة التحليلية؛ في نظرية النهايات العظمى والصغرى للدوال بأكثر من متغير واحد، في الإحصاء، وفي مواضيع أخرى كثيرة.

٤٣ ـ قانون سيلفستر(*) (Sylvester) للقصور الذاتي (العطالة)

لنعتبر الآن صيغة تربيعية حقيقية $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ رتبتها r . فوفقًا للنظرية (٤٠ ـ ١) يمكن إيجاد تحويل حقيقي غير شاذ يختزل f إلى الصيغة القانونية:

$$c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \dots c_ry_r^2,$$

حيث المعاملات c أعداد حقيقية، جميعها تختلف عن الصفر. وقد رأينا أن الصيغة القانونية ليست وحيدة، وبالطبع فإن التحويل الذي ننقل بوساطته f إلى الصيغة القانونية ليس وحيدًا. وعلى أي حال، فإنه طالما اقتصرنا على صيغة تربيعية حقيقية تحت تحويلات حقيقية، فإن عدد المعاملات الموجبة في الصيغة القانونية سيبقى وحيدًا. وتُعرف هذه النظرية بقانون القصور الذاتي.

(*) James Joseph Sylvester, (1814 - 1897).

نظريــة (٤٣ ـ ١) قانون القصور الذاتي

إذا حوّلنا صيغة تربيعيّة حقيقية $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ بوساطة تحويلين حقيقيين إلى صيغتين قانونيتين متميّزتين

$$|c_1|\, y_1^2 + \cdots + |c_\mu|\, y_\mu^2 - |c_{\mu+1}|\, y_{\mu+1}^2 - \cdots - |c_r|\, y_r^2, \tag{43.1}$$

و

$$|k_1|\, z_1^2 + \cdots + |k_\rho|\, z_\rho^2 - |k_{\rho+1}|\, z_{\rho+1}^2 - \cdots - |k_r|\, z_r^2 \tag{43.2}$$

فإن عدد المعاملات الموجبة في (43.1) يساوي عدد المعاملات الموجبة في (43.2).

وقد أشرنا بـ μ و ρ لعدد المعاملات الموجبة في (43.1) و (43.2) على الترتيب. وقصدُنا هو البرهان على أن $\mu = \rho$. إذا كان $\mu \neq \rho$ فإن الفرض $\mu > \rho$ هو مسألة رموز فقط.

وبما أنه توجد تحويلات غير شاذة تحوّل f إلى (43.1) و (43.2) ، على الترتيب، فهناك تحويلات غير شاذة تعيد الأخيرة هذه إلى f . دعنا نرمز لهذه التحويلات بـ:

$$\begin{array}{ll} y_1 = d_{11}x_1 + \cdots + d_{1n}x_n & z_1 = e_{11}x_1 + \cdots + e_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\mu = d_{\mu 1}x_1 + \cdots + d_{\mu n}x_n & z_\rho = e_{\rho 1}x_1 + \cdots + e_{\rho n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = d_{n1}x_1 + \cdots + d_{nn}x_n & z_n = e_{n1}x_1 + \cdots + e_{nn}x_n, \end{array} \tag{43.3}$$

والمقادير d و e هي أعداد حقيقية بحيث إن $|D| \neq 0$ ، $|E| \neq 0$. ومن (43.1) و (43.2) لدينا عندئذ المطابقة

$$\begin{aligned} &|c_1|\,(\textstyle\sum d_{1j}x_j)^2 + \cdots + |c_\mu|\,(\sum d_{\mu j}x_j)^2 - |c_{\mu+1}|\,(\sum d_{\mu+1,j}x_j)^2 \\ &\qquad - \cdots - |c_r|\,(\textstyle\sum d_{rj}x_j)^2 \\ &\equiv |k_1|\,(\textstyle\sum e_{1j}x_j)^2 + \cdots + |k_\rho|\,(\sum e_{\rho j}x_j)^2 \\ &\qquad - |k_{\rho+1}|\,(\textstyle\sum e_{\rho+1,j}x_j)^2 - \cdots - |k_r|\,(\sum e_{rj}x_j)^2, \end{aligned} \tag{43.4}$$

وبما أن كلاًّ من العبارتين يساوي $f(x)$. فلنعتبر الآن مجموعة $n - \mu + \rho$ من المعادلات المتجانسة الخطّية

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= e_{11}x_1 + \cdots + e_{1n}x_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\rho &= e_{\rho 1}x_1 + \cdots + e_{\rho n}x_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_{\mu+1} &= d_{\mu+1\,1}x_1 + \cdots + d_{\mu+1\,n}x_n = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= d_{n1}x_1 + \cdots + d_{nn}x_n = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43.5}$$

وبما أن $\sigma > \mu$ فلدينا $n - (\mu - \rho) < n$ من المعادلات، بحيث يوجد حل حقيقي $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. وبتعديل هذه القيم في (43.4) من أجل المقادير x نجد، باعتبار أن هذه الأخيرة مطابقة،

$$|c_1|\,(\sum d_{1i}\xi_i)^2 + \cdots + |c_\mu|\,(\sum d_{\mu i}\xi_i)^2 = -|k_{\rho+1}|\,(\sum e_{\rho+1\,i}\xi_i)^2 - \cdots - |k_r|\,(\sum e_{ri}\xi_i)^2. \tag{43.6}$$

وكل حد في الطرف الأيسر من هذه المعادلة موجب أو صفر، بينما كل حد من الطرف الأيمن سالب أو صفر. وبالتالي فإن (34.6) تصح فقط إذا كان كل حد مساوٍ للصفر على حدة، أي

$$\begin{aligned} d_{11}\xi_1 + \cdots + d_{1n}\xi_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{\mu 1}\xi_1 + \cdots + d_{\mu n}\xi_n &= 0. \end{aligned} \tag{43.7}$$

وهذه العلاقات، وعددها μ، بالإضافة إلى كون المقادير ξ تحقق المعادلات الـ $n - \mu$ الأخيرة في (43.5) تبيِّن أن لنظام المعادلات الخطِّية المتجانسة الـ n

$$\sum_{j=1}^{m} d_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

حلاً غير الحل التافه $(0, 0, \ldots, 0)$. وبما أن $|D| = |d_{ij}| \neq 0$ فإن هذه النتيجة مستحيلة وبالتالي فإن $\rho = \mu$ وهو المطلوب.

وغالبًا ما يدعى عدد المعاملات الموجبة في الصيغة القانونية دليل القصور الذاتي للصيغة أو فقط دليل الصيغة.

ولدينا الآن النظرية:

نظريـة (٤٣ - ٢)

يمكن اختزال صيغة تربيعيّة حقيقيّة رتبتها r ودليلها μ، بوساطة تحويل حقيقي غير شاذ، إلى الصيغة القانونية.

$$x_1'^2 + \cdots + x_\mu'^2 - x_{\mu+1}'^2 - \cdots - x_r'^2. \qquad (43.8)$$

وفي الحقيقة كل ما نضطر لعمله هو أن نطبّق على المتغيرات في (43.1) التحويل الحقيقي

$$x_i' = \sqrt{|c_i|}\, y_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$
$$x_i' = y_i \qquad (i = r+1, \cdots, n).$$

تعريف

يقال إن صيغتين تربيعيتين $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ و $h(y) = \sum b_{ij}y_iy_j$ في كل منهما n من المتغيّرات، متكافئتان تحت التحويلات الحقيقية، أو إنهما متكافئتان حقيقيًّا، إذا كان يوجد تحويل حقيقي غير شاذ $x_i = \sum d_{ij}y_j$ يحوّل f إلى h . ومن الواضح أن التحويل المعاكس يحوّل h إلى f .

ولصيغتين تربيعيتين متكافئتين حقيقيًّا f و h الدليل نفسه. ذلك لأنه إذا كان S تحويلاً حقيقيًّا غير شاذ ينقل f إلى h وإذا كان T ، تحويلاً حقيقيًّا غير شاذ ينقل h إلى الصيغة القانونية (43.8) ، فإن التحويل الحقيقي غير الشاذ ST ينقل f إلى (43.8). وبالتالي فإن لِـ f و h الدليل μ نفسه.

ونعبّر عن هذا بالنظرية التالية:

نظريـة (٤٣ - ٣)

لا يتغير دليل صيغة تربيعيّة حقيقيّة تحت تحويلات حقيقيّة غير شاذّة.

ويمكننا أن نعرض الآن النظريّة:

نظريّـة (٤٣ - ٤)

الشرط اللازم والكافي لتكون صيغتان تربيعيتان حقيقيتان $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j$ و $h(x) = \sum b_{ij}x_i'x_j'$ ، كل منهما بـ n من المتغـيّرات متكـافئتين حقيقيًّا هو أن يكون للصيغتين الرتبة نفسها والدليل نفسه.

تنتج ضرورة الشرط من حقيقة أن الرتبة والدليل لا يتغيران تحت تحويلات حقيقية غير شاذة. (نتيجة ٣٨ - ٢ ونظرية ٤٣ - ٣). أما كفاية الشرط فتنتج من حقيقة أنه إذا كان لـ f و h الرتبة r نفسها والدليل μ نفسه، فيمكن تحويل كل منهما إلى الصيغة

القانونية (43.8) نفسها .

ونعبّر أحيانًا عن النتائج المعروضة في النظرية (٤٣ ـ ٤) بقولنا: إنه من أجل صيغة تربيعية حقيقة بـ n من المتغيّرات، يشكّل الدليل والرتبة مجموعة تامة من اللامتغيّرات تحت التحويلات الحقيقية .

٤٤ ـ تحديد الدليل

تعلمنا في الفقرة **٣٩** أنه إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ هي الجذور المميّزة لمصفوفة حقيقية متناظرة A ، فيمكننا عندئذ تحويل الصيغة التربيعية $f(x) = \Sigma\, a_{ij}x_ix_j$ بوساطة تحويل حقيقي متعامد إلى الصيغة القانونية

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2$$

وبالتالي فإن الرتبة r لـ f هي تمامًا عدد الجذور التي لا تساوي الصفر والدليل μ هو بدقة عدد الجذور الموجبة للمعادلة المميّزة لـ A :

$$|A - \lambda I| = (-\lambda)^n + \sigma_1(-\lambda)^{n-1} + \dots - \sigma_{n-1}\lambda + \sigma_n = 0$$

وبما أن جميع جذور هذه المعادلة هي وفقًا للنتيجة (٣٠ ـ ١٣) حقيقية، فإن عدد الجذور الموجبة معطى تمامًا بقاعدة ديكارت للإشارات(*). ومنه نجد النظرية التالية:

نظرية (٤٤ ـ ١)

إذا كانت $f(x)$ صيغة تربيعيّة حقيقيّة للمصفوفة A ، فإن دليل القصور الذاتي μ للصيغة هو بدقة عدد تغيرات الإشارة في الدالّة المميّزة $|A - \lambda I|$ للمصفوفة A .

توضيح : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ صيغتين تربيعيتين مصفوفتاهما:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(*) Dickson, *First Course in the Therory of Equations*, (New York, 1922), Ex. 15, P. 75.

على الترتيب، فحدّد ما إذا كانت f و g متكافئتين حقيقيًا أم لا.

حـل: نجد بسهولة أن الدالّتين المميّزتين لِـ A و B هما

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 60\lambda - 100, \tag{44.1}$$

$$|B - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 28. \tag{44.2}$$

تقـدم الـدالـة (44.1) تغييرين في الإشـارة بحيث يكون دليل $f(x)$ هو 2 ، في حين تقـدم الدالة (44.2) تغيراً واحدًا فقط في الإشارة بحيث إن دليل $g(x)$ هو الواحد. وبالتالي فإن الصيغتين غير متكافئتين حقيقيًا. وعلى أي حال، فإن لهاتين الصيغتين الرتبة نفسها، أي أنهما متكافئتان تحت تحويل مركب غير شاذ.

وستُعطى طريقة أبسط لتحديد دليل الصيغة في الفقرة ٤٨.

٤٥ - توقيع صيغة تربيعيّة

لتكن $f(x)$ صيغة تربيعية حقيقية رتبتها r بِـ n من المتغيّرات، إذا كان μ دليل الصيغة، فقد وجدنا في الفقرة ٤٣ أن r و μ تشكل مجموعة تامة من لامتغيرات هذه الصيغة تحت تحويلات حقيقية. وقد أدخل سيلفستر (Sylvester) لامتغيراً آخر σ دعاه توقيع الصيغة. إذا كان ν عدد المعاملات السالبة في الصيغة القانونية (43.8) فقد عرَّف سيلفستر (Sylvester) الفرق

$$\mu - \nu = \sigma \tag{45.1}$$

بأنه توقيع الصيغة $f(x)$. وبما أن

$$\mu + \nu = r \tag{45.2}$$

فمن الـواضح أن r و σ تحدد بصورة وحيدة وتتحدد بِـ μ و ν أو بِـ μ و r. وبالتالي فإن r و σ هي مجموعة تامة من لامتغيرات $f(x)$ تحت تحويلات حقيقية. ويمكننا عندئذ إعادة عرض النظرية (٤٣ - ٤) كما يلي:

نظريـة (٤٥ - ١)

الشرط اللازم والكافي لتكون صيغتان تربيعيتان حقيقيتان $f(x)$ و $g(x)$، كل منهما بِـ n من المتغيّرات متكافئتين حقيقيًا هو أن يكون للصيغتين الرتبة نفسها والتوقيع نفسه.

٤٦ ـ الصيغ المحدَّدة وغير المحدَّدة

تعريـف

نقصـد بصيغة تربيعية غير محدَّدة صيغة حقيقية تحتوي صيغتها القانونية على معاملات سالبة ومعاملات موجبة، وهذا يعني بدلالة الدليل μ والرتبة r أن الصيغة التربيعية تكون غير محدّدة شريطة أن يكون $1 \leqslant \mu < r$. وإذا كان $\mu = r$ $(\mu = 0)$ فنقول إن الصيغة محدّدة موجبة (سالبة) أو نصف محدّدة موجبة (سالبة) وفقًا لما إذا كان $r = n$ أو $r < n$.

ومن الواضح أنه إذا كانت f موجبة نصف محدَّدة أو موجبة محدَّدة فعندئذ تكون $(-f)$ سالبة نصف محدَّدة أو سالبة محدَّدة.

نظريـة (٤٦ ـ ١)

تكون الصيغة التربيعية غير المحدَّدة $f(x)$ موجبة من أجل بعض القيم الحقيقية للمتغـيّرات وسـالبـة من أجـل قيم أخـرى. وتكون الصيغة نصف المحدَّدة الموجبة (السالبة) غير سالبة (غير موجبة) من أجل جميع القيم الحقيقية للمتغيّرات، وفي حالة الصيغة المحدَّدة تقوم المساواة فقط إذا كانت كل المتغيرات مساوية للصفر.

ليكن

$$
\begin{array}{l}
y_1 = d_{11}x_1 + \cdots + d_{1n}x_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_\mu = d_{\mu 1}x_1 + \cdots + d_{\mu n}x_n \qquad |D| = |d_{ij}| \neq 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n = d_{n1}x_1 + \cdots + d_{nn}x_n
\end{array}
\tag{46.1}
$$

التحـويل الحقيقي غير الشـاذ الـذي تتحـول بوساطته الصيغة القانونية إلى الصيغة المعطاة. ولنفرض أولاً أن الصيغة المعطاة غير محدَّدة ودليلها μ $(1 \leqslant \mu < r)$. فتكون الصيغة القانونية عندئذ:

$$y_1^2 + \ldots + y_\mu^2 - y_{\mu+1}^2 - \ldots - y_r^2 \tag{46.2}$$

لنـرمـز الآن بـ ξ_{ij} للعـامـل المـرافق لـ d_{ij} في $|D|$، ولنخصّص للمتغـيّرات x القيم

$(\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots, \zeta_{1n})$. فعندئذ وبالاستناد إلى (46.1) نجد أن $y_1 = |D|$ ، $y_i = 0\ (i \neq 1)$ ،
وهكذا تفترض (46.2) القيمة $|D|^2 > 0$. وإذا خصصنا الآن للمتغيّرات x القيم
$(\zeta_{r1}, \zeta_{r2}, \ldots, \zeta_{rn})$ فمن (46.1) نجد أن $y_r = |D|$ ، $y_i = 0\ (i \neq r)$ ، وبالتالي تفترض
(46.2) القيمة $-|D|^2 < 0$.

وفي حالة كون $f(x)$ موجبة نصف محدَّدة أو محدَّدة، $\mu = r$ ، أي أن جميع المعاملات في (46.2) موجبة، وباعتبار أن كلًّا من العبارات $\Sigma d_{ij}x_j$ هي عبارة حقيقية، فتكون $f(x) \geqslant 0$. وأخيراً إذا كانت $f(x)$ موجبة محدَّدة، أي أن $\mu = r = n$ ، فإن $f(x) = 0$ إذا، وفقط إذا، كان كل $y_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. وبالتالي

$$\Sigma d_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

وبما أن $|D| \neq 0$ فإن هذه العلاقات تتحقق إذا، وفقط إذا، كانت جميع المقادير x مساوية للصفر.

تعريف

تدعى المصفوفة المتناظرة الحقيقية A مصفوفة غير محدَّدة أو (نصف) محدَّدة وفقًا لما إذا كانت الصيغة التربيعية الموافقة $f(x) = X'AX$ غير محدَّدة أو (نصف) محدَّدة.

نظرية (٤٦ ـ ٢)

إذا كانت C أي مصفوفة حقيقية غير شاذة فإن $C'C$ هي، عندئذ، مصفوفة محدَّدة موجبة، وعلى العكس، يمكن التعبير عن كل مصفوفة محدَّدة موجبة A على شكل جداء من هذا القبيل.

ذلك لأن الصيغة $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$ ، التي مصفوفتها I ، هي بوضوح صيغة محدَّدة موجبة. وإذا طبَّقنا الآن على المتغيّرات x تحويلاً حقيقيًّا مصفوفته C فإن الصيغة الناتجة التي مصفوفتها $C'IC = C'C$ ، هي أيضًا محدَّدة موجبة.

وعلى العكس، إذا كانت A محدَّدة موجبة فيمكننا إيجاد مصفوفة حقيقية غير شاذة D بحيث إن $D'AD = I$. وإذا أخذنا $C = D^{-1}$ فلدينا $A = C'IC = C'C$.

وبعد هذا نبرهن:

نظريـة (٤٦ ـ ٣)

يمكن التعبـير عن كل مصفوفة موجبة نصف ـ محدّدة A رتبتها r على الشكل $C'C$ ، حيث C مصفـوفة حقيقية مربّعة $n \times n$ رتبتها r . وعلى العكس، إذا كانت C أي مصفـوفـة حقيقية مربّعـة $n \times n$ رتبتهـا r ، فعندئذ تكون $C'C$ موجبة نصف محدَّدة رتبتها r .

إذا كانت $f(x)$ صيغة تربيعية مصفوفتها A ، فإن مصفوفة الصيغة القانونية هي

$$N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبـالتالي توجد مصفوفة حقيقية غير شاذة B بحيث يكون $B'NB = A$. ومن الواضح بالتجربة أن $N^2 = N$ ، وأيضًا $N = N'$ مما يسمح لنا بكتابة

$$A = B'NB = B'N \,.\, NB = B'N' \,.\, NB = C'C,$$

حيث رتبة $C = NB$ هي r .

وعـلى العكس، لتكن C أي مصفوفة حقيقية مربّعة $n \times n$ رتبتها r . فتكون عندئذ المصفوفة $A = C'C$ مصفوفة حقيقية متناظرة رتبتها $s \leqslant r$. لتكن الصيغة المختزلة لِـ A هي

$$N = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \epsilon_s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_i = \pm 1.$$

فتوجد عندئذ مصفوفة حقيقية غير شاذة Q بحيث إن

$$Q'AQ = Q'C' \,.\, CQ = N.$$

لتكن $CQ = B$ ، فيتضح من العلاقة $B'B = N$ أن

$$\sum_{i=1}^{n} (b_{ij})^2 = \varepsilon_j, (j = 1, 2, \ldots, r) \quad ; \quad \sum_{i=1} (b_{ij})^2 = 0, (j > r).$$

ويتّضح بالتالي، وباعتبار أن المقادير b حقيقية، أنه لا يمكن أن يكون أي من المقادير ϵ_i مساويًا لِـ -1 مما يجعل N ، وبالتالي A ، نصف ـ محدّدة موجبة. وهو المطلوب.

نظريـة (٤٦ ـ ٤)

كل محدَّد مصغّر أساسي لمصفوفة A موجبة نصف ـ محدَّدة أكبر أو يساوي الصفر، حيث تصحّ المتراجحة إذا كانت A محدَّدة.

نعلم بالاستناد إلى النظرية (٤٦ ـ ٣)، أن $A = C'C$ ، حيث C حقيقية. لنرمز بـ Δ للمحدَّد المصغر الأساسي الذي يحوي m صفًّا ويقبع في الأعمدة $i_1, i_2, \ldots, i_m$ والصفوف ذات الأرقام نفسها من A . وإذا كانت M عندئذ هي المصفوفة $n \times m$ المؤلفة من الأعمدة $i_1, i_2, \ldots, i_m$ من C ، فنعلم من النظرية (٩ ـ ١) أن Δ هو مجموع مربّعات جميع محدّدات M التي تحوي m صفًّا وهو بالتالي أكبر أو يساوي الصفر. وفضلاً عن ذلك فإن $\Delta = 0$ فقط إذا كانت جميع محدَّدات M التي تحوي m صفًّا مساوية للصفر، ولا يمكن حدوث هذا إذا كانت C غير شاذة.

وعلى العكس، إذا كان كل محدّد مصغر أساسي من A أكبر أو يساوي الصفر، فيجب أن تكون A موجبة نصف محدّدة. ذلك لأن كلاًّ من المعاملات σ_m في دالة A المميّزة

$$|A - \lambda I| = \sum (-\lambda)^{n-m} \sigma_m$$

يكون أكبر أو يساوي الصفر، بحيث لا يمكن أن يكون لـ $|A - \lambda I| = 0$ جذر سالب. وعندما تصح المتراجحة، يكون لدينا بشكل خاص $\sigma_n = |A| > 0$ وبالتالي لا يمكن أيضًا أن يكون للمعادلة جذر مساوٍ للصفر.

نظريـة (٤٦ ـ ٥)

الشرط اللازم والكافي لتكون الصيغة التربيعية الحقيقية $X'AX$ موجبة محدَّدة (نصف ـ محدّدة) هو أن يكون كل محدَّد مصغر، أساسي من المصفوفة A أكبر من الصفر (أكبر أو يساوي الصفر).

تماريـــن

اختزل باستخدام طريقة لاجرانج كلاًّ من الصيغ التربيعية التي نذكر مصفوفاتها فيما يلي إلى عبارة لا تحوي إلاّ حدودًا مربّعة

١) $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ٦) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

حلِّل إلى عوامل خطّية ما يقبل التحليل من الصيغ التربيعية التالية :

٧) $2x^2 + y^2 + 6z^2 - 3xy + 7xz - 5yz$

٨) $3x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 8xy + 10xz + 8yz$

٩) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy + 12xz - 6yz$

١٠) $2x^2 + 5z^2 + 12\omega^2 + 4xy - 11xz + 10x\omega - 2yz + 8y\omega - 23z\omega$

١١) $9x^2 + z^2 + \omega^2 + 6xz - 12x\omega - 4z\omega$

١٢) إذا كانت $f(x) = \Sigma a_{ij}x_ix_j$ صيغـة تربيعية مصفوفتها A ، ورمزنا بِـ α_{ij} للعامل المرافق لِـ a_{ij} في عبارة $|A|$. فتدعى الصيغة التربيعيّة $F(u) = \Sigma\ \alpha_{ij}u_iu_j$ الصيغة القرينة لِـ $f(x)$. بيِّن أنه إذا كانت رتبة A هي $n-1$ ، فعندئذ تكون $F(u)$ مربّع دالة خطّية في المقادير u .

٤٧ ـ صيغ نظاميّة (Regular)

لتكن A مصفوفة متناظرة رتبتها r وعناصرها من حقل $\mathscr{F}$. وليكن

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \quad p_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{vmatrix}, \cdots, \quad p_n = |A|. \tag{47.1}$$

أي أن p_i ترمز لمحدّد المصفوفة المصغرة الأساسية الذي يحوي i صفًّا الواقعة في الزاوية العليا اليسرى من A . إذا كان $p_r \neq 0$ ، ولم ينعـدم أي مقدارين متتاليين من المتتالية $p_0, p_1, \ldots, p_r$ ، فنقول إن المصفوفة A مرتّبة بصورة نظامية وإن الصيغة التربيعية الموافقة $X'AX$ هي صيغة نظامية .

وسنبرهن النظرية :

نظريـة (٤٧ ـ ١)

إذا كانت A أي مصفوفة متناظرة رتبتها r وعناصرها من حقل $\mathcal{F}$ فيمكننا دائمًا إجـراء مبـادلات بين الصفوف والمبادلات نفسها بين الأعمدة ، بحيث نحفظ تناظر المصفوفة ، وبحيث تكون المصفوفة الناتجة مرتّبة بصورة نظامية .

ونبرهن أولاً التمهيدية التالية :

تمهيديـة (٤٧ ـ ٢)

كل مصفوفة متناظرة A رتبتها r تحوي على الأقل محدّدًا مصغرًا أساسيًا واحدًا غير منعدم من المرتبة r .

لبرهان هذا نأخذ محدّدًا مصغرًا رتبته r ويقع في الأعمدة $i_1, i_2, \ldots, i_r$ من A . ولنحرِّك هذه الأعمدة في اتجاه الأعمدة التي تقع أمامها حتى نصل بها إلى المواقع الـ r الأولى . وبعد إجراء المبادلات نفسها بالنسبة للصفوف نحصل على محدَّد غير منعدم من المرتبة r واقع في الأعمدة الـ r الأولى . وهذه الأخيرة تكون عندئذ مستقلة خطيًّا ، في حين يمكن التعبير عن كل من الأعمدة الـ $n - r$ الباقية كتركيب خطِّي فيها . وبطرح مضاعفات مناسبة للأعمدة الـ r الأولى من كل من الأعمدة الـ $n - r$ الباقية نجعل هذه الأعمدة الأخيرة مساوية للصفر . وبإنجاز العملية نفسها بالنسبة للصفوف نختزل الصفوف الـ $n - r$ الأخيرة إلى الصفر . وتكون المصفوفة الناتجة من الشكل :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_r} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_r i_1} & \cdots & a_{i_r i_r} & 0 & \cdot & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{array}\right]$$

وبما أن رتبة هذه المصفوفة هي r ، فلا بدَّ أنه يكون المحدّد الذي يحوي r صفًّا، والواقع في الزاوية العليا اليسرى، مختلفًا عن الصفر، وهذا بوضوح محدّد مصغر أساسي من A .

وبعد ذلك نبرهن التمهيدية التالية :

تمهيدية (٤٧ ـ ٣)

إذا كانت A مصفوفة متناظرة غير شاذة من الرتبة n ، فيمكن إخضاع صفوف A إلى مبادلات، وإخضاع الأعمدة إلى المبادلات نفسها، بحيث نحفظ تناظر المصفوفة، وبطريقة لا يكون كل من p_{n-1} وp_{n-2} وp_n مساويًا للصفر.

من الواضح أن العبارة صحيحة من أجل مصفوفة غير شاذة من المرتبة 1 أو المرتبة 2 ، باعتبار أن $p_0 = 1$ في كل من الحالتين. لتكن A الآن من مرتبة ما n . إذا كان $\alpha_{nn} \neq 0$ فلدينا $P_{n-1} \neq 0$ وإذا كان $\alpha_{nn} = 0$ إلاَّ أنَّ $\alpha_{ii} \neq 0$ ، فإننا نحرِّك الصف i والعمود i فوق الصفوف والأعمدة التي تليها ونضعها في الموضع الأخير. وفي المصفوفة الجديدة لدينا $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$.

لنفرض الآن أن كل $\alpha_{in} = 0$. فعندئذ تكون إحدى العناصر $\alpha_{in} = 0$ على الأقل $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ غير مساوية للصفر باعتبار أن A غير شاذة. لنحرك الآن الصف i فوق الصفوف الـ $n - i - 1$ التي تليه مباشرة بحيث نضعه في الموضع $(n-1)$. لنقم بالشيء نفسه بالنسبة للأعمدة. وعندئذ تكون $\alpha_{n-1,n} \neq 0$ في المصفوفة الجديدة. ومن النتيجة (١٧ ـ ٤) لدينا :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = p_{n-2}p_n.$$

وبما أن $\alpha_{n,n} = \alpha_{n-1,n-1} = 0$ و $\alpha_{n,n-1} = \alpha_{n-1,n}$ فلدينا :

$$p_{n-2}p_n = -\alpha^2_{n,n-1} \neq 0 \quad (*) \qquad (47.2)$$

(*) من الواضح أن هذه العلاقة تصح أيضًا في الحالة التي يكون فيها $\alpha_{nn} = 0$ ، $\alpha_{n-1,n-1} \neq 0$ ، ولكننا سنتفق في هذه الحالة على مبادلة الصفين الأخيرين والعمودين الأخيرين من A وبحيث يكون $p_{n-1} = \alpha_{n-1,n-1} \neq 0$ في المصفوفة الجديدة.

وهو المطلوب. ولكن لدينا، أكثر من ذلك، النتيجة التالية:

نتيجـة (٤٧ ـ ٤)

إذا كانت A مصفوفة حقيقية متناظرة وكان $p_{n-2}p_n \neq 0$ و $p_{n-1} = 0$، فعندئذ يكون لـ p_{n-2} و p_n إشارتان متعاكستان.

ونحن الآن في موضع نستطيع منه برهان النظرية (٤٧ ـ ١). فبما أن رتبة A هي r فهي تحوي، وفقًا للتمهيدية (٤٧ ـ ٢)، محدَّدًا مصغرًا أساسيًّا واحدًا على الأقل غير منعـدم ويحـوي r صفًّا، وبإزاحة مناسبة للصفوف والأعمدة يمكن جلبه إلى الزاوية اليسرى العليا من A. وعنـدئـذ يكـون لدينـا $p_r \neq 0$. وبـالاستناد إلى التمهيدية (٤٧ ـ ٣) يمكننـا الآن القيام بانسحـابات فيما بين الصفوف الـ r الأولى والأعمدة الـ r الأولى وبطريقة يكون فيها إما $p_{r-1} \neq 0$ أو $p_{r-2} \neq 0$. ويمكننا الاستمرار في هذه العملية حتى تصبح المصفوفة الناتجة أخيرًا مصفوفة مرتبة بانتظام.

٤٨ ـ طريقة كرونِكر (Kronecker) في الاختزال

سنقدم الآن طريقة أخرى لاختزال صيغة تربيعية، وهي تعود أساسًا لكرونِكر (Kronecker) وسنشير إليها على أنها طريقة كرونِكر.

تمهيديـة (٤٨ ـ ١)

إذا كانت $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X'AX$ صيغـة تربيعية معـاملاتها من حقل $\mathscr{F}$، وإذا كان $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$، فيمكننا إيجاد تحويل غير شاذ معاملاته في $\mathscr{F}$ ويحوّل $f(x)$ إلى

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}y_iy_j + p_{n-1}p_ny_n^2 \quad , \quad (p_n = |A|)$$

وفي الحقيقة مثل هذا التحويل هو

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + \alpha_{ni}y_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ x_n &= \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \tag{48.1}$$

إذا رمزنا بِـ B لمصفوفة التحويل (48.1) فينبغي أن يلاحظ الطالب أن الأعمدة الـ $n-1$ الأولى من B هي نفسها كما في المصفوفة I، بينما يتألف العمود n من B من العوامل المتممة لعناصر العمود n من A. ونرى في الحال أن $|B| = \alpha_{nn} \neq 0$. وفضلاً

عن ذلك، عند تشكيل الجداء AB نجد أولاً باستخدام الخواص الأساسية للمحدَّدات:

$$B'AB = B'(AB) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & 0 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & & p_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1}p_n \end{pmatrix}.$$

وهذا يبرهن بوضوح التمهيدية (٤٨ ـ ١).

نبرهن الآن:

تمهيدية (٤٨ ـ ٢)

إذا كانت $f(x) = \sum a_{ij}x_ix_j = X'AX$ صيغة تربيعيّة معاملاتها من حقل $\mathcal{F}$، وكان $\alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{n,n} = 0$ و $\alpha_{n,n-1} \neq 0$، فيمكن إيجاد تحويل غير شاذ معاملاته من $\mathcal{F}$ ويحول $f(x)$ إلى

$$g(z) = \sum_{i,j=1}^{n-2} a_{ij}z_iz_j + 2\alpha_{n,n-1}p_n(z_{n-1}^2 - z_n^2) \qquad (p_n = |A|).$$

ونطبِّق أولاً التحويل التالي ومصفوفته C:

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + \alpha_{i,n-1}y_{n-1} + \alpha_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-2) \\ x_{n-1} &= \alpha_{n-1,n-1}y_{n-1} + \alpha_{n-1,n}y_n \qquad\qquad (48.2) \\ x_n &= \alpha_{n,n-1}y_{n-1} + \alpha_{nn}y_n. \end{aligned}$$

إذا شكَّلنا الآن الجداء AC أولاً ثم استخدمنا الخواص الأساسية للمحدّدات، فنحصل على المصفوفة التالية كمصفوفة الصيغة الجديدة بعد التحويل

$$C'AC = C'(AC) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n-2} & \cdots & \alpha_{n-2n-1} & \alpha_{n-1n-1} & \alpha_{nn-1} \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{n-2n} & \alpha_{n-1n} & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21} & \cdots & a_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-2} & p_n & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & 0 & p_n \end{bmatrix} \tag{48.3}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-21} & \cdots & a_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{nn-1}p_n \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1n}p_n & 0 \end{bmatrix}.$$

الصيغة الجديدة هي إذن:

$$\sum_{i,j=1}^{n-2} a_{ij}y_iy_j + 2\alpha_{nn-1}p_ny_{n-1}y_n. \tag{48.4}$$

وإذا طبَّقنا الآن التحويل الإضافي:

$$\begin{aligned} y_i &= z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ y_{n-1} &= z_{n-1} - z_n \\ y_n &= z_{n-1} + z_n, \end{aligned} \tag{48.5}$$

نحصل على الصيغة $g(z)$ كما عرضناها في التمهيدية.

ونحن الآن جاهزون لإعطاء طريقة كرونكر (Kronecker) لاختزال صيغة تربيعية $f(x) = X'AX$ إلى عبارة تحوي حدودًا مربّعة فقط(*). لتكن A مصفوفة

(*) مع أن الاختزال نفسه قابل للتطبيق على صيغة معاملاتها في أي حقل $\mathcal{F}$ مميّزه لا يساوي 2، فإن الحالة الأكثر أهمية هي تلك التي يكون فيها $\mathcal{F}$ حقيقيًّا. ووفقًا لذلك فستقتصر مناقشتنا على هذه الحالة.

مربّعة $n \times n$ رتبتها r وعناصرها أعداد حقيقية. وبإعادة ترقيم المتغيّرات، إذا كان ذلك ضروريًّا، يمكن تحويل $f(x)$ إلى صيغة نظامية، أي أنه لا يوجد في المتتالية

$$p_0 = 1, p_1, p_2, \dots, p_{r-1}, p_r,$$

حدّان متتاليان منعدمان و$p_r \neq 0$. والأعمدة الـ r الأولى في المصفوفة الجديدة A مستقلة خطّيًّا، في حين يمكن التعبير عن كل من الأعمدة الـ $n - r$ الباقية (إذا كان $n > r$) كتركيب خطّي في الأعمدة الـ r الأولى. وهكذا إذا أضفنا إلى كل من الأعمدة الـ $n - r$ الأخيرة مضاعفات مناسبة للأعمدة الـ r الأولى، وقمنا بالعمليات نفسها من أجل الصفوف، فإننا نحصل على صيغة غير شاذة فيها r من المتغيّرات، ومصفوفتها هي المصغر $r \times r$ الواقع في الزاوية اليسرى العليا من A. ومن السهل أن نرى أنه يمكن النظر إلى هذه العملية كتحويل حقيقي غير شاذ للمتغيرات، $X = DY$، والمصفوفة D من الشكل

$$D = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & d_{11} & \cdots & d_{n-r1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & d_{1r} & \cdots & d_{n-rr} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right].$$

إذا كان $p_{r-1} \neq 0$ فإننا نستخدم التحويل المذكور في التمهيدية (٤٨ ـ ١) لعزل حد مربّع واحد $p_{r-1}p_r y_r^2$، معامله موجب أو سالب وفقًا لما إذا كان الزوج من الحدود

$$p_{r-1}, p_r$$

يمثّل استمرارًا أو تغيراً في الإشارة. وعلى أي حال، إذا كان $p_{r-1} = \alpha_{rr} = 0$. فعندئذ وبالاستناد إلى النتيجة (٤٧ ـ ٣) يكون لـ p_{r-2} و p_r إشارتان مختلفتان. وإذا كان $\alpha_{r-1,r-1} \neq 0$، فيمكن مبادلة العمودين الأخيرين فيما بينهما والصفين الأخيرين فيما بينهما والحصول على p_{r-1} جديدة مختلفة عن الصفر. وبتطبيقين متتاليين للتمهيدية (٤٨ ـ ١)، نعزل حدّين مربّعين لهما إشارتان مختلفتان. وعلى أي حال، إذا كان $\alpha_{r-1,r-1} = 0$ فعندئذ $\alpha_{r,r-1} \neq 0$ بالاستناد إلى (47.2) ونستخدم التمهيدية (٤٨ ـ ٢)

لعزل حدَّين مربّعين لهما أيضًا إشارتان متعاكستان. وبالإضافة إلى ذلك، نلاحظ، باعتبار أن الحدَّين p_{r-2} وp_r من إشارتين متعاكستين، أن المتتالية الجزئية من ثلاثة حدود

$$p_{r-2}, (\pm), p_r$$

تمثل بالضبط استمرارًا واحدًا وتغيرًا واحدًا في الإشارة، وذلك بصرف النظر عن الإشارة المنسوبة للحد المتلاشي p_{r-1}.

ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة حتى تُكتب الصيغة التربيعية المعطاة كعبارة تحوي حدودًا تربيعية فقط. وبالإضافة إلى ذلك فإن المناقشة تبيّن أنّنا برهنّا:

قاعدة جاندلفينكر (Gundelfinger)

لتكن $f(x) = X'AX$ صيغة تربيعية نظامية رتبتها r ومعاملاتها حقيقية، ولنعرِّف متتالية المقادير p كما يلي:

$$p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \cdots, \quad p_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}. \tag{48.6}$$

إذا خُفِّضت $f(x)$ إلى صيغة قانونية باستخدام تحويلات حقيقية فإن عدد المعاملات الموجبة في الصيغة القانونية هي بالضبط عدد مرات استمرار الإشارة، وعدد المعاملات السالبة هو بالضبط عدد مرات تغير الإشارة في المتتالية (48.6) حيث يمكن اعتبار الحد المنعدم كـ + أو − إلاّ أنّه لا بدَّ من عدِّه.

ولدينا في الحال النتيجة:

نتيجة (٤٨ - ٣)

الشرط اللازم والكافي لتكون الصيغة التربيعيّة الحقيقيّة $f(x) = X'AX$ موجبة نصف - محدَّدة (محدَّدة) هو أن يكون كل حد في المتتالية (48.6) موجبًا (و $r \equiv n$).

توضيح : لنعتبر الصيغتين التربيعيتين $f(x)$ و $g(x)$ للفقرة ٤٤، ومصفوفتاهما على الترتيب هما:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

فمن أجل هاتين الصيغتين نجد أن متواليتي المقادير p هما على الترتيب:

$$\begin{array}{lrrrr} A: & 1, & 4, & 0, & -100; \\ B: & 1, & 2, & -12, & 28. \end{array}$$

وتقدِّم المتتالية الأولى استمرارين وتغيراً واحدًا في الإشارة، أي أن الصيغة التربيعية تحوي معاملين موجبين ومعاملاً واحدًا سالبًا. إلا أن المتتالية الثانية تحوي استمرارًا واحدًا وتغيّرين، أي أن للصيغة القانونية معاملاً واحدًا موجبًا ومعاملين سالبين. وتتفق هاتان النتيجتان مع ما وجدناه في الفقرة ٤٤.

تمارين

١ ـ ١١) في التمارين من ١ إلى ١١ في نهاية الفقرة ٤٦ أعد ترقيم المتغيّرات، عند الضرورة، بحيث تصبح الصيغة نظامية، وعندئذ حوِّل الصيغة مستخدمًا اختزال كرونِكر إلى صيغة قانونية.

١٢) المطلوب نفسه في التمارين ١ ـ ١١ من أجل الصيغتين اللّتين مصفوفتاهما:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

١٣) إذا كانت $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ صيغة تربيعيّة حقيقيّة فأوجد بدلالة r و σ الشرطين اللازمين والكافيين ليكون f قابلاً للتحليل إلى عوامل خطّية حقيقية.

١٤) إذا كانت $f(x)$ صيغـة تربيعية حقيقية مصفـوفتها A وكان k أي عدد حقيقي موجب أكبر عدديًا من أي جذر مميّز سالب لِـ A ، فبينّ أن الصيغة التربيعية $\sum_{1}^{n} a_{ij}x_i x_j + k \sum x_i^2$ موجبة محدَّدة.

١٥) برهن أن الشرطين اللازمين والكافيين ليمكن التعبير عن الصيغة التربيعية الحقيقية $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2\,bxy + 2gzx + 2fyz$ على شكـل جداء عاملين خطّيين حقيقين متميّزين هما الشرطان:

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad ab + bc + ac < f^2 + g^2 + h^2$$

١٦) لنفرض في متوالية المقادير p في (48.6) أن $0 = p_{i-1} = p_{i-2}$ و $p_{i-3}p_i \neq 0$. بينّ أن المتوالية الجزئية $p_{i-3}, 0, 0, p_i$ تمثل تغيّرين واستمرارًا واحدًا في الإشارة أو تغيرًا واحدًا واستمرارين في الإشارة وذلك وفقًا لما إذا كان p_{i-3} و p_i من الإشارة نفسها أو من إشارتين متعاكستين.

١٧) استخدم التمرين السابق لتحديد دليل المصفوفتين

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

تحقّق من النتيجة بإعادة ترتيب الصفوف والأعمدة في كل مصفوفة وتطبيق قاعدة جاندلفينكر (Gundelfinger).

١٨) لترمز A و B لمصفوفتين مربّعتين حقيقيتين متناظرتين، ولتكن A موجبة محدّدة.

(ا) بينّ أن الجذور $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ للمعادلة $|\lambda A + B| = 0$ هي جميعًا حقيقية.

(ب) بينّ أيضًا أنه توجد مصفوفة حقيقية غير شاذة R بحيث إن $R'AR = I$ ، $R'BR = diag\,(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$.

٤٩ ـ تطبيق في مسائل النهايات العظمى والصغرى

لتكن $\omega = f(x, y, z)$ دالـة حقيقية في المتغـيِّرات المستقلة الثلاثة x ، y و z .
ولنفرض أن

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{49.1}$$

عند النقطة $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. ولنعتبر مصفوفة المشتقات من المرتبة الثانية محسوبة عند النقطة (x_0, y_0, z_0) :

$$H_0 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}} \tag{49.2}$$

ويُبرهن في الكتب المدرسية في الحساب المتقدم أنه :
إذا كانت H_0 مصفوفة محدّدة موجبة ، فإن لـ f نهاية صغرى عند النقطة P_0 ،
إذا كانت H_0 مصفوفة محدّدة سالبة ، فإن لـ f نهاية عظمى عند النقطة P_0 ،
إذا كانت H_0 مصفـوفـة غير محدّدة ، غير شاذة أو شاذة ، فليس لـ f لا نهاية عظمى ولا نهاية صغرى عند P_0 ،
إذا كانت H_0 نصف محدّدة فإن الاختبار يفشل .

ويمكن تطبيق القاعدة على دالّة $\omega = f(x, y)$ أو $\omega = f(x)$ في متغيّرين أو متغيّر واحد على الترتيب ، حيث نعدِّل (49.1) بصورة مناسبة ، وحيث نضع في الحالتين على الترتيب :

$$H_0 = (f_{xx})_{x=x_0} \qquad \text{أو} \qquad H_0 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \tag{49.3}$$

بدلاً من المصفوفة H_0 المذكورة آنفًا .

توضيح : اختبر من أجل النهاية العظمى والصغرى الدالة

$$f = 3axy - x^3 - y^3 \quad (a > 0)$$

لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3x^2 \text{ و } \frac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2 ،$$

بحيث إن

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ عند $P_0\,(0, 0)$ وعند $P_1\,(a, a)$.

مصفوفة المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية هي $H = \begin{bmatrix} -6x & 3a \\ 3a & -6y \end{bmatrix}$. وعند النقطة $P = (0, 0)$ نجد أن المصفوفة $H = \begin{bmatrix} 0 & 3a \\ 3a & 0 \end{bmatrix}$ غير محدّدة، وبالتالي فإنه ليس لِـ ω لا نهاية عظمى ولا نهاية صغرى عند $(0, 0)$. وفي $P_1 = (a, a)$ لدينا $H = \begin{bmatrix} -6a & 3a \\ 3a & -6a \end{bmatrix}$ وهي محدَّدة سالبة، وبالتالي فإن لِـ ω نهاية عظمى قيمتها $\omega = a^3$ عند النقطة (a, a).

تمارين

افحص كل دالّة مما يلي من أجل النهاية العظمى والنهاية الصغرى

١) $w = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2$

٢) $w = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x - 6y + 9.$

٣) $w = 7x^2 + 10xy + y^2 + 6x - 6y - 1.$

٤) $w = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1.$

٥) $w = x^2 + 4xy - 2y^2 - 8x - 12y - 11.$

٦) $w = x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 10yz + 2x + 18y - 50z + 9.$

٧) $w = 4x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 20xz + 2yz + 2x - 12y + 3.$

٨) $w = x^2 + 2y^2 - 17z^2 + 4xy - 2xz + 8yz + 2x - 24y + 82z + 16.$

٩) $w = ax + by - x^2 - xy - y^2.$

١٠) $w = x^2 + 2xy - y^2 - 8x - 4y + 5.$

١١) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 8y^2 + 5.$

١٢) $z = 2x^4 + y^4 + 4x^2 - 8y^2 + 1.$

١٣) $z = 2x^4 - y^4 + 4x^2 + 8y^2 - 7.$

١٤) $z = x^4 + 2y^4 + 4x^2 + 4y^2 - 3.$

تحقّق أن لكل من الدوال التالية النهاية العظمى أو النهاية الصغرى التي تشير إليها:

١٥) $z = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 6x^2 - 9y^2 + 5$ [نهاية عظمى عند النقطة $(0,0)$].

١٦) $z = x^4 + y^4 + xy - x^2 - y^2$ [نهاية عظمى عند النقطة $(0,0)$ ، صغرى عند $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، صغرى عند $\pm(\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2)$].

١٧) $z = (a-x)(a-y)(x+y-a), (a > 0)$ [نهاية عظمى عند $(2a/3, 2a/3)$].

١٨) $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ [نهاية عظمى عند $(\pi/6, \pi/6)$ ، $(5\pi/6, 5\pi/6)$ وصغرى عند $(3\pi/2, 3\pi/2)$].

١٩) $z = (ax + by + c)^2(x^2 + y^2 + 1)^{-1}$ [نهاية عظمى قيمتها $z = a^2 + b^2 + c^2$ عند النقطة $(a/c, b/c)$].

اختبر كلاً من الدوال من أجل النهاية العظمى أو النهاية الصغرى عند المبدأ:

٢٠) $\omega = x^4 + y^2z^2 - 2xyz - x^2 + y^2 - 2z^2$

٢١) $\omega = 2x^3 - 5yz^2 + 3xyz + x^2 + 2y^2 + z^2$

٢٢) استخدم الدالة $f(x, y) = x^2 + 2y^4$ للتحقق من أنه لكي يكون للدالة f نهاية صغرى عند النقطة $P(x_0, x_0)$ فليس من الضروري أن تكون المصفوفة H_0 محدَّدة موجبة.

٥٠ ـ المميّز لمعادلة جبرية

لتكن

$$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{50.1}$$

معادلة جبرية معاملاتها أعداد حقيقية أو مركّبة. إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي جذور المعادلة، فتدعى العبارة

$$\Delta = \prod_{j>i}^{1,\ldots,n} (x_j - x_i)^2, \tag{50.2}$$

حيث يمتد الجداء فوق جميع الـ $\frac{n(n-1)}{2}$ من توافيق الجذور $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مأخوذة أزواجًا، مميِّز المعادلة (50.1). ويتضح بالتجربة أن Δ لا يتغير عند إجراء تبادل بين أي جذرين من جذور المعادلة؛ أي أن Δ دالة متناظرة في جذور المعادلة (50.1) ، وكما هو معـروف جيدًا، يمكن التعبـير عن Δ ككثيرة حدود $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ في معاملات $F(x)$. ويمكن استخدام مصفوفة فاندرموند (Vandermonde).

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{50.3}$$

التي ناقشناها في الفقرة ١٣ لتشكيل عبارة مريحة ومفيدة من أجل Δ . وفي الحقيقة، وبالاستناد إلى النظرية (١٣ ـ ١)، يمكننا أن نكتب:

$$\Delta = |V|^2 = |V'V|. \tag{50.4}$$

متَّبعين الرموز المعتادة، دعنا نكتب:

$$s_i = x_1^i + x_2^i + \ldots + x_n^i, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2n-2) \tag{50.5}$$

$$s_0 = n$$

وبإجراء عملية الضرب نرى بسهولة أن

$$V'V = \left[\begin{array}{cccc|cc} s_0 & s_1 & \cdots & s_{r-1} & \cdot & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_r & \cdot & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{r-1} & s_r & & s_{2r-2} & \cdot & s_{n+r-2} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{n+r-1} & \cdot & s_{2n-2} \end{array}\right]. \tag{50.6}$$

ويمكن حساب s_i هنا، وهو بالتعريف مجموع جذور المعادلة $F(x) = 0$ بعد رفع كل منها إلى القوة i ، باللجوء إلى علاقات نيوتن (Newton) (*).

(*) Dickson. *First Course in the Theory of Equations,* (New York, 1922), pp. 135-136.

$$\begin{aligned} s_1 + a_1 &= 0 \\ s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 &= 0, \\ s_i + a_1 s_{i-1} + \cdots + a_{i-1} s_1 + i a_i &= 0, \qquad (i \leq n) \\ s_i + a_1 s_{i-1} + \cdots + a_{n-1} s_{i-n+1} + a_n s_{i-n} &= 0 \qquad (i > n). \end{aligned} \tag{50.7}$$

ويمكننا حل (50.7) من أجل كل من s_i فنجدها على شكل كثيرة حدود في $a_1, a_2, \ldots, a_n$ وبحيث يصبح الجداء $V'V$ مصفوفة متناظرة عناصرها كثيرات حدود في معاملات $F(x)$.

وبالاستناد إلى النظرية (١٣ ـ ١) فإن V ، وبالتالي $V'V$ ، يكون شاذاً إذا ، وفقط إذا ، تساوي اثنان من المقادير x ، ولكن يمكن استخدام (50.6) لتعطينا معلومات أكثر من ذلك . لنفرض أن $r \leqslant n$ بالضبط من الجذور في (50.1) هي جذور مختلفة بحيث تكون :

$$F(x) = (x - x_1)^{\nu_1} (x - x_2)^{\nu_2} \ldots (x - x_r)^{\nu_r} \quad , \quad (\Sigma \nu_i = n)$$

ولنشكّل الجداء التالي للمصفوفات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \cdots & x_r^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \nu_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & x_r & \cdots & x_r^{r-1} \end{bmatrix} \tag{50.8}$$

وبما أن (50.5) تصبح في هذه الحالة :

$$s_i = \nu_1 x_1^i + \nu_2 x_2^i + \ldots \nu_r x_r^i,$$

فمن الواضح أن جداء المصفوفات في (50.8) هو، على وجه الدقة ، المصغر الأساسي ذو الـ r صفاً

$$P_r = \begin{bmatrix} s_0 & \cdots & s_{r-1} \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots & \cdot \\ s_{r-1} & \cdots & s_{2r-2} \end{bmatrix} \tag{50.9}$$

الواقع في الزاوية اليسرى العليا من $V'V$ في (50.6). وبما أن الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في (50.8) متميّزة ، فإن مصفوفة فاندرموند (Vandermonde) في (50.8) هي ، بالاستناد إلى النظرية (١٣ ـ ١) ، غير شاذة وبالتالي فإن P_r غير شاذة ، ولذلك فإن رتبة $V'V$ في (50.6)

هي ، على الأقل ، r . وفضلاً عن ذلك ، وباعتبار أن رتبة $V'V$ لا يمكن أن تتعدى رتبة V وهي r ، فلا بد أن تكون الرتبة مساوية تمامًا لِـ r .

ومنه نجد النظرية :

نظريـة (٥٠ ـ ١)

رتبة المصفوفة $V'V$ في (50.6) تساوي عدد الجذور المختلفة في المعادلة $F(x) = 0$. وهذه النتيجة ، مثلها مثل تلك المعبّر عنها في المعادلات (50.6) و (50.8) ، تصحّ سواءً كانت جذور $F(x)$ حقيقية أم مركّبة .

وبصـورة خاصـة ، دعنا نفرض أن جذور $F(x) = 0$ جميعها حقيقية . فعندئذ وباعتبار أن V حقيقية وأن كل v_i في (50.8) موجب ، فإننا نستنتج أن المصفوفة P_r محدَّدة موجبة .

ومنه نجد النظرية التالية :

نظريـة (٥٠ ـ ٢)

لتكن $F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ معادلة جبرية جذورها $x_1, x_2, \dots, x_n$ ولتكن $V'V$ المصفوفة المربّعة $n \times n$ الموافقة لهذه المعادلة والمعرَّفة في (50.6). إذا كانت جذور $F(x) = 0$ جميعها حقيقية و r منها بالضبط هي جذور مختلفة . فإن رتبة المصفوفة $V'V$ تكون r ، وفضلاً عن ذلك فإن المصغر الأساسي P_r ذا الـ r صفًّا والواقع في الزاوية اليسرى العليا من $V'V$ هو مصفوفة محدَّدة موجبة .

لنفرض ثانيةً أن معاملات المعادلة $F(x) = 0$ حقيقية وأن للمعادلة s من أزواج الجذور المركّبة المختلفة .

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$$

وهي مكررة ، على الترتيب ، $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ مرة ، ولها $r - 2s$ من الجذور الحقيقية المختلفة $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ وهي مكررة ، على الترتيب $v_1, v_2, \dots, v_t$ مرة .

إذا كتبنا
$$(\alpha_j + i\beta_j)^k = \alpha_j^{(k)} + i\beta_j^{(k)}$$

فمن الواضح عندئذ أن
$$(\alpha_j - i\beta_j)^k = \alpha_j^{(k)} - i\beta_j^{(k)}$$

ويمكن كتابة مصفوفة فاندرموند (Vandermonde) في (50.8) على الشكل :

$$V'_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 + i\beta_1 & \alpha_1 - i\beta_1 & \cdots & \alpha_s + i\beta_s & \alpha_s - i\beta_s & \cdots & \gamma_1 & \cdots & \gamma_t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(r-1)} + i\beta_1^{(r-1)} & \alpha_1^{(r-1)} - i\beta_1^{(r-1)} & \cdots & \alpha_s^{(r-1)} + i\beta_s^{(r-1)} & \alpha_s^{(r-1)} - i\beta_s^{(r-1)} & \cdots & \gamma_1^{r-1} & \cdots & \gamma_t^{r-1} \end{pmatrix}$$

ويتّضح بالتجربة أنّه يمكن كتابة V'_r كجداء للمصفوفتين المربعتين $W'_r M'_r$ حيث :

$$W'_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_s & \beta_s & \gamma_1 & \cdots & \gamma_t \\ \alpha_1^{(2)} & \beta_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \cdots & \alpha_s^{(2)} & \beta_s^{(2)} & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_t^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(r-1)} & \beta_1^{(r-1)} & \alpha_2^{(r-1)} & \beta_2^{(r-1)} & \cdots & \alpha_s^{(r-1)} & \beta_s^{(r-1)} & \gamma_1^{r-1} & \cdots & \gamma_t^{r-1} \end{pmatrix}$$

$$M_r' = \left(\begin{array}{cc:c:cc:ccc}
1 & 1 & & & & & & \\
i & -i & & & & & & \\
\hdashline
 & & \ddots & & & & & \\
\hdashline
 & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & i & -i & & & \\
\hdashline
 & & & & & 1 & \cdots & 0 \\
 & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)$$

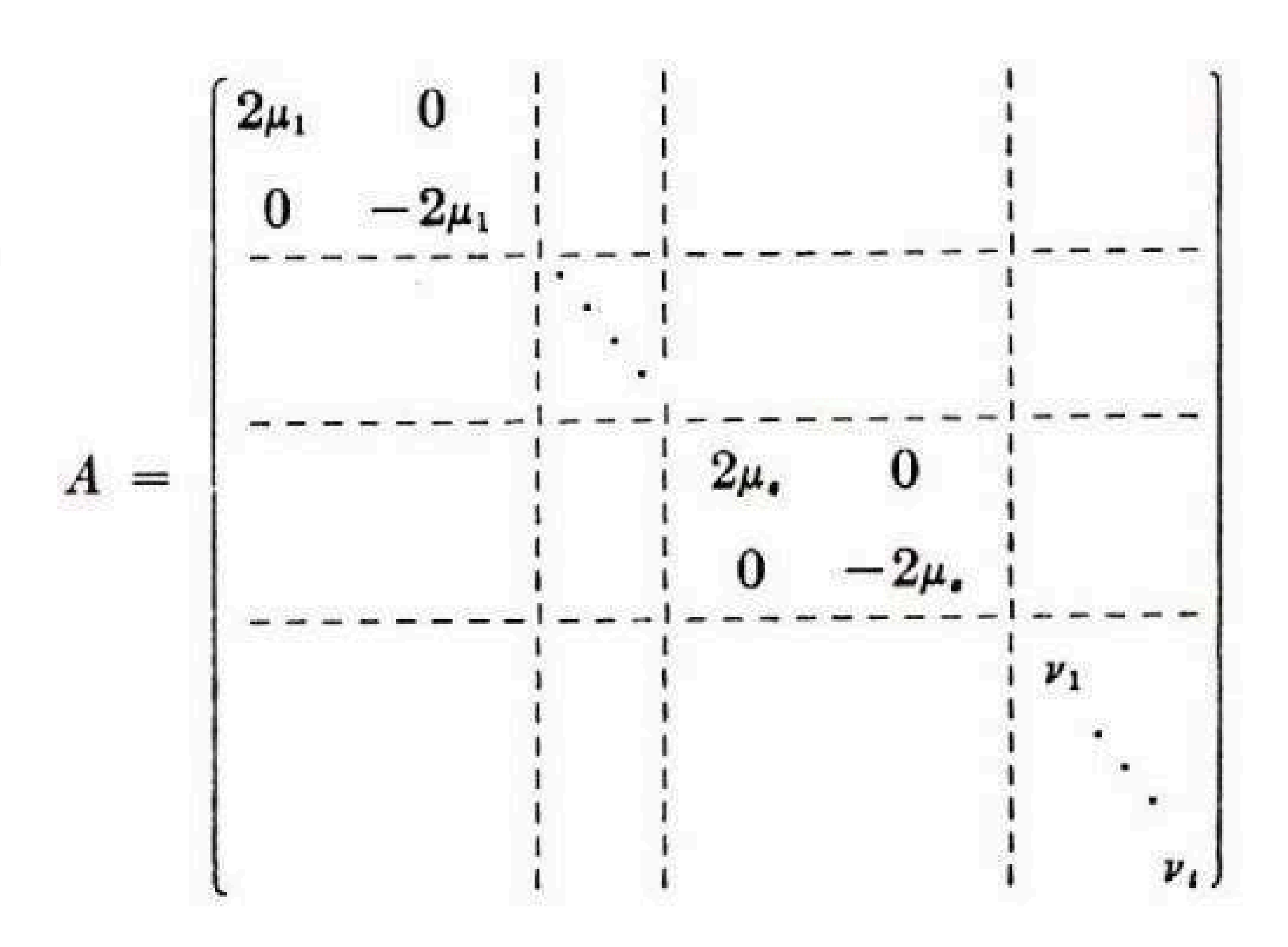
حيث تكون القوالب (blocks) في M_r' التي لاتقع على القطر الرئيس أصفارًا.
إذا عرّفنا الآن:

$$N_r = \left(\begin{array}{cc:c:cc:cc}
\mu_1 & 0 & & & & & \\
0 & \mu_1 & & & & & \\
\hdashline
 & & \ddots & & & & \\
\hdashline
 & & & \mu_s & 0 & & \\
 & & & 0 & \mu_s & & \\
\hdashline
 & & & & & \nu_1 & 0 \\
 & & & & & 0 & \nu_t
\end{array}\right)$$

على أنها مصفوفة قوالب قطرية مربّعة ومقسّمة بصورة مشابهة إلى M_r' ، فمن السهل التحقق من أن المصفوفة المربّعة P_r في (50.9) تساوي:

$$P_r = V_r'NV_r = W_r'(M_r'NM_r)W_r = W_r'AW_r$$

حيث W_r حقيقية وغير شاذة و$M_r'NM_r = A$ هي المصفوفة القطرية



ويتضح من هذا أن المصفوفة القطرية A تحوي بالضبط s من العناصر السالبة.

ومنه نجد النظرية :

نظريـة (٥٠ ـ ٣)

لتكن المعـادلـة الجـبرية الحقيقية $F(x) = 0$ من الدرجة n ، لها r من الجذور المختلفة، و$s \leq \frac{r}{2}$ من بين هذه الجذور هي أزواج من الجذور المركّبة المترافقة. فعندئذ تكون رتبة المصفوفة $V'V$ مساوية لـ r . وفضلاً عن ذلك، إذا كانت P_r هي المصفوفة المربّعة $r \times r$ الواقعة في الزاوية اليسرى العليا من $V'V$ فإن الصيغة القانونية لـ P_r تحوي تمامًا s من المعاملات السالبة. وبالتالي فإنه يمكن تحديد عدد الأزواج المختلفة من الجذور المركّبة المترافقة لـ $F(x) = 0$ من P_r وذلك بالاستناد إلى قاعدة جاندلفينكر (Gandelfinger).

تماريـن

١) بيِّن أنه من أجل المعادلة التكعيبية $F(x) = x^3 + px + q = 0$ تكون المصفوفة $V'V$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{bmatrix}.$$

وبالتالي

$$p_0 = 1,\ \ p_1 = 3,\ \ p_2 = -6p,\ \ p_3 = -4p^3 - 27q^2.$$

٢) استخدم نتائج التمرين ١ لتحديد عدد الجذور الحقيقية لكل من المعادلات التالية:

أ) $x^3 - 2x + 1 = 0$

ب) $x^3 + 2x - 1 = 0$

جـ) $x^3 - 3x + 2 = 0$

٣) بيِّن أنه يكون للمعادلة التكعيبية في التمرين ١ ثلاثة جذور حقيقية مختلفة إذا، وفقط إذا، كان

$$p_3 = -4p^3 - 27q^2 > 0$$

٤) من أجل المعادلة التكعيبية $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ ، تكون المصفوفة $V'V$ ، بعد بعض الاختصارات:

$$\begin{bmatrix} 3 & -a_1 & a_2 \\ -a_1 & a_1^2 - 2a_2 & -3a_3 \\ a_2 & -3a_3 & a_2^2 - 2a_1a_3 \end{bmatrix}.$$

استخدم هذا لتحديد عدد الجذور الحقيقية المختلفة والأزواج المختلفة من الجذور المركّبة للمعادلات التعكيبية:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$$

٥) من أجل المعادلة من الدرجة الرابعة $\varphi(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ ، تكون المصفوفة $V'V$ بعد بعض التعديلات:

$$\begin{bmatrix} 4 & -a_1 & -2a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_1^2 - 2a_2 & a_1a_2 - 3a_3 & -4a_4 \\ -2a_2 & a_1a_2 - 3a_3 & -2a_1a_3 + 2a_2^2 - 4a_4 & -3a_1a_4 \\ a_3 & -4a_4 & -3a_1a_4 & a_3^2 - 2a_2a_4 \end{bmatrix}.$$

استخدم هذه المصفوفة للحصول على معلومات تتعلق بجذور المعادلات التالية من الدرجة الرابعة

$$x^4 + 1 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$



الفصل الثاني عشر

مصفوفات

لامبدا (LAMBDA)

٥١ ـ كثيرات حدود معاملاتها مصفوفات

ليكن λ متغيراً سلّميًا، ولتكن $a_{ij}(\lambda), (i, j = 1, 2, \dots, n)$ ، n^2 من كثيرات الحدود في λ بمعاملات من الحقل $\mathcal{F}$. فسندعو المصفوفة المربّعة $n \times n$.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{51.1}$$

بالمصفوفة $- \lambda$. وعلى سبيل المثال، المصفوفة

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 2\lambda + 3 & 3\lambda^2 + 4\lambda - 1 \\ \lambda^3 + 2 & 3\lambda^2 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 3\lambda^2 - \lambda + 7 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة $- \lambda$ مربّعة 3×3 . وسنفترض أن λ تتصف بخاصة الإبدال، ليس فقط مع جميع عناصر $\mathcal{F}$ ، ولكن أيضًا مع جميع المصفوفات المربّعة $n \times n$ التي تقع عناصرها في الحقل $\mathcal{F}$. وبهذا الفهم يمكن كتابة مصفوفة $- \lambda$ على شكل كثيرة حدود في λ حيث المعاملات هي مصفوفات. ونشير عندئذ إلى المصفوفة $- \lambda$ على أنها كثيرة حدود

معاملاتها مصفوفات. وعلى سبيل المثال، يمكن كتابة مصفوفة – λ السابقة على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -i \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

وبدلاً من اعتبار مصفوفة مربّعة كما في (51.1) يمكن اعتبار مصفوفة $m \times n$. وعلى أي حال، فمن أجل معظم غايات هذا الكتاب نحتاج لاعتبار مصفوفات مربّعة فقط، بحيث إننا، وبالرغم من وجود بعض الخسارة في شمولية المناقشة، سنقصر انتباهنا على الحالة الأخيرة.

٥٢ ـ العمليات النسبية في حالة مصفوفات – λ

لنعتبر الآن مصفوفتي – λ مكتوبتين لكثيرتي حدود معاملاتها مصفوفات:

$$A(\lambda) = A_0 \lambda^s + A_1 \lambda^{s-1} + \ldots + A_s, \tag{52.1}$$

$$B(\lambda) = B_0 \lambda^t + B_1 \lambda^{t-1} + \ldots + B_t, \tag{52.2}$$

حيث إنّ A_i ، B_i مصفوفات مربّعة تقع عناصرها في الحقل $\mathscr{F}$. وإذا كانت $A_0 \neq 0$ فنقول إن كثيرة الحدود $A(\lambda)$ التي معاملاتها مصفوفات هي من الدرجة s .

تعريف

نقول إن كثيرتي الحدود $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ التي معاملاتها مصفوفات، والمذكورتين في (52.1) و (52.2) ، متساويتان [$A(\lambda) = B(\lambda)$] إذا، وفقط إذا، كان $s = t$ و $A_i = B_i \ (i = 1, 2, \ldots, s)$.

وإذا كان $s > t$ فيمكننا أن نكتب:

$$B(\lambda) = 0 . \lambda^s + 0 . \lambda^{s-1} + \ldots + 0 . \lambda^{t+1} + B_0 \lambda^t + \ldots + B_t$$

وعندئذ نعرِّف:

$$A(\lambda) \pm B(\lambda) = A_0\lambda^s + A_1\lambda^{s-1} + \ldots + (A_{s-t} \pm B_0)\lambda^t + \ldots + (A_s \pm B_t). \quad (52.3)$$

وأبعد من ذلك، فإننا نعرف الجداء $A(\lambda)\,B(\lambda)$ ، بهذا الترتيب، على أنه :

$$A(\lambda)B(\lambda) = \left(\sum_{i=0}^{s} A_i\lambda^{s-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{t} B_j\lambda^{t-j}\right) = \sum\sum A_iB_j\lambda^{s+t-(i+j)}.$$

وإذا وضعنا في المجموع الأخير $i + j = \sigma$ ، يمكن كتابة

$$A(\lambda)B(\lambda) = \sum_{\sigma=0}^{s+t}\left(\sum_{i+j=\sigma} A_iB_j\right)\lambda^{s+t-\sigma} = A_0B_0\lambda^{s+t} + (A_1B_0 + A_0B_1)\lambda^{s+t-1} + \cdots \quad (52.4)$$

والآن إذا كان $A_0B_0 \neq 0$ ، كما هي الحال بالتأكيد إذا كانت إحدى المصفوفتين A_0 أو B_0 غير شاذة، فإن كثيرة الحدود $A(\lambda)\,B(\lambda)$ التي معاملاتها مصفوفات هي من الدرجة $s + t$.

ومنه نجد النظرية :

نظرية (٥٢ - ١)

إذا كانت $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ كثيرتي حدود معاملاتهما مصفوفات ودرجتاهما s و t على الترتيب، كما هو معطى في (52.1) و (52.2) ، وكانت أي من A_0 أو B_0 غير شاذة فإن درجة كثيرة الحدود $A(\lambda)\,B(\lambda)$ التي معاملاتها مصفوفات تكون مساوية لـ $s + t$.

نعتبر الآن عملية القسمة ونبرهن النظرية المهمة التالية :

نظرية (٥٢ - ٢)

لتكن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ كثيرتي الحدود اللتين معاملاتهما مصفوفات والمبيّنتين في (52.1) و (52.2) ، وحيث A_i و B_i هي مصفوفات مربّعة $n \times n$ عناصرها من حقل $\mathcal{F}$. إذا كانت B_0 غير شاذة فتوجد كثيرتا حدود وحيدتان $Q(\lambda)$ و $R(\lambda)$ معاملاتها مصفوفات والأولى إذا كانت غير الصفر فهي من الدرجة $s - t$ ، والأخيرة إما أن تكون صفرًا أو من الدرجة $t - 1$ على الأكثر، وبحيث يكون :

$$A(\lambda) = Q(\lambda)\,B(\lambda) + R(\lambda) \quad (52.5)$$

لبرهـان هذه النـظرية نلاحظ أنه إذا كان $s < t$ ، فيمكننا أن نأخذ $Q(\lambda) = 0$ و $R(\lambda) = A(\lambda)$ ، والنـظرية تبقى صحيحـة إلى الحـد الـذي يتعلق بوجود Q و R .
لنفـرض الآن أن $s \geqslant t$ ، وكـأساس لبرهان الاستقراء نفرض أنه يوجد Q و R يحقِّقان (52.5) من أجل جميع كثيرات الحدود $A(\lambda)$ من درجة أصغر من s . وبما أن B_0 غير شاذة فإن B_0^{-1} موجود. لنعتبر الآن الفرق

$$A(\lambda) - A_0B_0^{-1}B(\lambda)\lambda^{s-t} \equiv (A_1 - A_0B_0^{-1}B_1)\lambda^{s-1} + (A_2 - A_0B_0^{-1}B_2)\lambda^{s-2} + \cdots \quad (52.6)$$

من الواضح أن كثيرة الحدود $P(\lambda)$ التي معاملاتها مصفوفات، والواقعة في الطرف الأيمن من (52.6) ، هي من الـدرجـة $s - 1$. وتـوجـد إذن بالفرض كثيرتا حدود $P(\lambda)$ و $R(\lambda)$ معاملاتها مصفوفات ودرجتاهما أقل من $s - t$ و t ، على الترتيب، وبحيث يكون

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda).$$

ومنه

$$A(\lambda) = [A_0B_0^{-1}\lambda^{s-t} + P_1(\lambda)]B(\lambda) + R(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda),$$

كما تنص النظرية.

ولتبيان وحـدانية كل من كثـيرتي الحـدود $Q(\lambda)$ و $R(\lambda)$ المـذكـورتـين في (52.5) ، دعـنـا نفـرض أن $Q'(\lambda)$ و $R'(\lambda)$ هما زوج ثان من كثـيرات الحـدود يحقِّق شروط النظرية بحيث يكون

$$A(\lambda) = Q'(\lambda)B(\lambda) + R'(\lambda). \quad (52.7)$$

وبطرح (52.7) من (52.5) طرفًا من طرف وإعادة الترتيب نجد:

$$(Q - Q')B = R' - R.$$

إذا كان $Q - Q' \neq 0$ ، وبـاعتبـار أن B_0 غير شاذة، فإننـا نجـد وفقًـا للنـظرية (٥٢ - ١) أن درجة الطرف الأيسر من هذه المعادلة الأخيرة هي على الأقل t ، في حين أن درجة الطرف الأيمن هي حتمًا أقل من t ، ومن الواضح أن هذا مستحيل. إذن $Q - Q' = 0$ وبالتالي فإن $R - R' = 0$ أيضًا. ومنه تكون النظرية (52.2) قد بُرهنت.

وبطريقة مشابهة يمكننا إقامة البرهان على النظرية التالية:

نظريـة (٥٢ ـ ٣)

تحت شروط النـظرية (٥٢ ـ ٢) توجـد كثـيرتـا حدود $Q_1(\lambda)$ و $R_1(\lambda)$ معاملاتها مصفوفات ووحيدتان، الأولى، إذا لم تكن صفرًا، من الدرجة $s - t$، والأخيرة، إذا لم تكن صفرًا، من الدرجة $t - 1$ على الأكثر، بحيث يكون

$$A(\lambda) = B(\lambda) Q_1(\lambda) + R_1(\lambda). \qquad (52.8)$$

إذا كان $R(\lambda) = 0$ في (52.5) ، فتـدعـى $A(\lambda)$ المضـاعف الأيسر لِـ $B(\lambda)$ كما تدعى $B(\lambda)$ القـاسم الأيمن لِـ $A(\lambda)$. وفي هذه الحـالـة نقـول إن التقسيم تام. وبصـورة مماثلة، إذا كان $R_1 = 0$ في (52.8) ، فإن A هي المضـاعف الأيمن لِـ B و B هي القاسم الأيسر لِـ A .

ويمكن أن يكون التقسيم تامًّا في جانب، في حين إنه غير تام في الجانب الآخر. فمثلاً، إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 + 2 & \lambda^2 + 2 \\ -3\lambda & -\lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

فمن السهل التحقق من أن

$$R = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 2\lambda + 2 & \lambda - 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix},$$ حيث $A = QB + R,$

في حين

$R_1 = 0.$ ، $Q_1 = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$ حيث ، $A = BQ_1 + R_1,$

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $B(\lambda)$ كثيرة حدود سلَّمية :

$$B(\lambda) = b_0\lambda^t I + b_1\lambda^{t-1} I + \dots b_t I = f(\lambda) I,$$

فعندئذ يمكن مبادلة $B(\lambda)$ مع $Q(\lambda)$ بحيث إن $Q = Q_1$ و $R = R_1$. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كانت القسمة تامة فلدينا :

$$A(\lambda) = f(\lambda)\, I \,.\, Q(\lambda), \tag{52.9}$$

أي أن كل عنصر $a_{ij}(\lambda)$ من المصفوفة $A(\lambda)$ قابل للقسمة على $f(\lambda)$. وعلى العكس، نستنتج مباشرة أنه إذا كان كل عنصر $a_{ij}(\lambda)$ من المصفوفة $A(\lambda)$ قابلاً للقسمة على كثيرة الحدود السلّمية $f(\lambda)$ ، فعندئذ تَصِحّ (52.9) حيث $Q(\lambda)$ هي كثيرة حدود معاملاتها مصفوفات.

وهكذا نجد النظرية:

نظريـة (٥٢ ـ ٤)

تكـون المصفـوفة اللامبدية $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$ قابلة للقسمة على كثيرة الحدود السلّمية $f(\lambda) I$ إذا، وفقط إذا، كان كل عنصر $a_{ij}(\lambda)$ من A قابلاً للقسمة على $f(\lambda)$.

٥٣ ـ التحويلات الابتدائية لمصفوفة $- \lambda$

نعني بالتحويل الابتدائي لمصفوفة $- \lambda$ تحويلاً من النوعين الأولين المذكورين في الفقرة **١٢** أو تحويل من:

النـوع (III). نضيف إلى عنـاصر صف (أو عمود) جداءات العناصر الموافقة لصف آخر (أو عمود آخر) بكثيرة الحدود $\phi(\lambda)$ نفسها.

وكما في الفقرة **١٥** تمامًا نستنتج أنه يمكن القيام بتحويل أولي من النوع I أو النـوع II على صفـوف المصفـوفـة الـلامبـدية A (λ) بضرب $A(\lambda)$ على اليسـار بمصفوفة غير شاذة اختيرت بصورة مناسبة وعناصرها من حقل $\mathcal{F}$. وإذا رغبنا بأن نضيـف إلى عنـاصر الـصف i من $A(\lambda)$ جداءات العنـاصر المـوافقـة للصف j بـ $\phi(\lambda)$ $(j \neq 1)$ ، فإننـا نضرب $A(\lambda)$ على اليسـار بمصفـوفـة نحصـل عليهـا من I بوضـع $\phi(\lambda)$ بدلاً من 0 في المـوضـع (i, j) . وفي الحقيقة، من السهل أن نتحقق من أنـه لكي نقـوم بأي تحويل أولي على صفـوف (أعمـدة) $A(\lambda)$ ، نضرب $A(\lambda)$ على اليسار (اليمين) بالمصفوفة التي نحصل عليها من I بعد القيام بالتحويل الأولي المـطلوب بالنسبـة لصفوف (أعمدة) I . وسندعو هذه المصفوفات التي نضرب بها، مصفوفات تحويل أولي.

تعريـف

تدعى مصفوفة – λ مربّعة، محدَّدها عدد ثابت مختلف عن الصفر، كثيرة حدود ابتدائية.

ومن الواضح أن كل مصفوفة تحويل ابتدائي هي كثيرة حدود ابتدائية. وفضلاً عن ذلك، فإن صحة النظرية التالية تتضح من تعريف مقلوب مصفوفة.

نظريـة (٥٣ ـ ١)

مقلوب كثيرة حدود ابتدائية هو بدوره كثيرة حدود ابتدائية.

تعريـف

إذا احتـوت المصفـوفـة $A(\lambda)$ على الأقل مصفوفة مصغّرة واحدة مربّعة $r \times r$ محدَّدهـا لا يتـطابق مع الصفـر، ولكنهـا لم تحو أي مصفـوفـة مصغّـرة مربّعـة $(r+1) \times (r+1)$ محدَّدهـا لا يتـطابق مع الصفـر، قلنـا: إن رتبـة $A(\lambda)$ هي r. وإذا كان $|A(\lambda)| \not\equiv 0$، فنقول: إن $A(\lambda)$ غير شاذة.

ومن خلال المناقشة نفسها التي استُخدمت في برهان النظرية (١٢ ـ ١) يمكننا برهان:

نظريـة (٥٣ ـ ٢)

لا يغيِّر التحويل الأولي رتبة مصفوفة – λ.

ولكن رتبـة مصفـوفـة – λ ليست اللامتغير الوحيد تحت التحويلات الأولية. لتكن $A(\lambda)$ مصفـوفـة – λ مربّعـة رتبتها r و $B(\lambda)$ المصفوفة التي نحصل عليها من $A(\lambda)$ نتيجة تطبيق تحويل أولي. ليكن m عددًا صحيحًا موجبًا أصغر أو يساوي r، ولنرمز بـ $d_m(\lambda)$ لأعلى عامل مشترك (مأخوذ بمعامل يساوي الواحد للحدِّ الرئيس) بين جميع المحدّدات المصغّرة من $A(\lambda)$ التي تحوي m صفًّا، وبِـ $g_m(\lambda)$ للعامل الموافق من أجل $B(\lambda)$. فنبيِّن الآن أن

$$d_m(\lambda) \equiv g_m(\lambda), \quad (m = 1, 2, \ldots, r).$$

ليكن $\Delta_m(\lambda)$ محدّدًا مصغّرًا تقليديًا من $B(\lambda)$ يحوي m صفًّا. بما أن $B(\lambda)$ هو جداء $A(\lambda)$ بمصفوفة تحويل أولي. فيمكن التعبير عن $\Delta_m(\lambda)$، وفقًا للنظرية (٩ ـ ٣)، كتركيب خطّي في محدّدات $A(\lambda)$ ذات الـ m صفًّا. وبالتالي فإن $d_m(\lambda)$ تقبل القسمة على كل $\Delta_m(\lambda)$ وبالتالي تقبل القسمة على أعلى عامل مشترك بينها وهو $g_m(\lambda)$. وعلى العكس، بما أننا نحصل على $A(\lambda)$ نتيجة تطبيق تحويل أولي على $B(\lambda)$، فنستنتج أن $g_m(\lambda)$ تقبل القسمة على $d_m(\lambda)$. وبالتالي فإن كثيرتي الحدود السلّميتين متطابقتان باعتبار أن معاملات الحد الرئيس في كل منها هو الواحد.

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية التالية:

نظرية (٥٣ ـ ٣)

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة $\lambda -$ مربّعة $n \times n$ رتبتها r، ولتكن $B(\lambda)$ المصفوفة التي نحصل عليها من $A(\lambda)$ بعد تطبيق متتالية من التحويلات الأوّلية. إذا كان $d_m(\lambda)$ أعلى عامل مشترك (مأخوذ بمعامل يساوي الواحد للحدّ الرئيس) لجميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ m صفًّا $(m \leqslant r)$ من $A(\lambda)$، فعندئذ يكون $d_m(\lambda)$ أعلى عامل مشترك أيضًا بين جميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ m صفًّا من $B(\lambda)$.

٥٤ ـ الصيغة الناظمية لسميث (Smith)

سنبرهن الآن النظرية التالية:

نظرية (٥٤ ـ ١)

بوساطة التحويلات الأولية يمكن اختزال مصفوفة $A(\lambda)$ إلى صيغة سميث (Smith) الناظمية

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_r(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (54.1)$$

حيث معامل الحد الرئيس في كل $e_i(\lambda)$ هو الواحد، وحيث $e_i(\lambda)$ قاسم لِـ $e_{i+1}(\lambda)$ ، $(i = 1, 2, \dots, r-1)$. أي أنه توجد كثيرتا حدود ابتدائيتان $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث إن

$$PAQ = N \tag{54.2}$$

نبرهن هذه النظرية بالاستقراء على الرتبة r . وللقيام بذلك، نلاحظ قبل كل شيء أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفة $A(\lambda)$ رتبتها صفر، ذلك لأن $A(\lambda)$ عندئذ هي المصفوفة صفر وهي من الشكل N . وكأساس للاستقراء نفترض أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفة $A(\lambda)$ رتبتها $r-1$ $(r \geqslant 1)$ ، ونبرهن أنها صحيحة من أجل مصفوفة $A(\lambda)$ رتبتها r .

بما أن $A(\lambda) \neq 0$ فإن المصفوفة تحوي على الأقل عنصرًا واحدًا مختلفًا عن الصفر. ليكن $a_{ij}(\lambda)$ عنصرًا درجته هي الدرجة الأصغر في المصفوفة. وبإجراء مبادلة بين الصف i والصف الأول، وبعدها بين العمود j والعمود الأول، نأتي إلى الموضع $(1, 1)$ بعنصر $a_{11}(\lambda)$ مختلف عن الصفر، وهو كثيرة حدود لها الدرجة الأصغر من بين جميع عناصر المصفوفة. وتبرز هنا حالتان: (١) $a_{11}(\lambda)$ هي عامل من عوامل كل عنصر من A . (٢) $a_{11}(\lambda)$ ليست عاملاً لكل عناصر A . وسنعتبر الحالة (٢) أولاً:

لنفرض أنه يوجد عنصر $a_{1j}(\lambda)$ في الصف الأول من A لا يقبل القسمة على a_{11} . نقسِّم a_{1j} على a_{11} لنحصل على حاصل قسمة q_{1j} وباق لا يساوي الصفر a''_{1j} من درجة أقل من درجة a_{11} أي أن:

$$a_{1j} = q_{1j}a_{11} + a''_{1j} \quad , \quad (a''_{1j} \neq 0)$$

وإذا طرحنا الآن من عناصر العمود j جداءات العناصر الموافقة من العمود الأول بـ q_{1j} فإن a''_{1j} تحل محل a_{1j} ، ويمكن عندئذ إزاحة هذا العنصر الأخير إلى الموضع $(1, 1)$. وهكذا فإنه إذا كان يوجد في الصف الأول (أو، وفق نقاش مماثل، في العمود الأول) عنصر لا يقبل القسمة على a_{11} فإنه يمكن أن نضع بدلاً من a_{11} كثيرة حدود من درجة أدنى. وهذا يوضح بأنه بعد عدد منته من الخطوات لا بد من الحصول على مصفوفة يكون كل عنصر من صفها الأول وكل عنصر من عمودها الأول قابلاً للقسمة على a_{11} .

وقد يحدث أن يكون كل عنصر a_{ij} من المصفوفة الناتجة قابلاً للقسمة على a_{11}، وفي هذه الحالة نكون قد عدنا إلى الحالة (١). لنفرض، على أية حال، أنه يوجد، على الأقل، عنصر واحد a_{ij} غير قابل للقسمة على a_{11}. اكتب $a_{i1} = q_{i1}a_{11}$ و $a_{1j} = q_{1j}a_{11}$. ومن الصف i، اطرح جداء الصف الأول بـ q_{i1} وهذا يختزل a_{i1} إلى الصفر ويضع $a_{ij} - q_{i1}q_{1j}a_{11}$ في موضع a_{ij}. وإذا أضفنا الآن الصف i إلى الصف الأول، فإن a_{11} تبقى بدون تغيير في حين يحل محل a_{ij} العنصر $a_{ij} + q_{1j}(1 - q_{i1})a_{11}$ وهو لا يقبل القسمة على a_{11}. ويمكننا عندئذ أن نمضي كما سبق فنضع، بوساطة تحويلات أوّلية، في موضع a_{11} كثيرة حدود من درجة أدنى.

ويمكن الاستمرار بهذه الطريقة التي وصفناها طالما أن العنصر ذا الدرجة الأدنى، ويمكن أن نأخذه كالعنصر a_{11}، لا يكون عاملاً من عوامل كل عنصر من المصفوفة. ولذلك فإنه لا بدَّ أن نصل، أخيرًا، وبعد عدد منته من الخطوات إلى مصفوفة مكافئة يكون فيها a_{11} عاملاً، وفي الحقيقة ووفقًا للنظرية (٥٣ ـ ٣)، القاسم المشترك الأعظم لجميع عناصر المصفوفة. ويمكننا الآن تخفيض كل عنصر في الصف الأول وكل عنصر في العمود الأول، باستثناء a_{11}، إلى الصفر، وذلك بأن نطرح الصف الأول مضروبًا بمقدار مناسب من الصفوف الباقية وطرح العمود الأول مضروبًا بمقدار مناسب من بقية الأعمدة. وهذه التحويلات تغير العناصر في الصفوف والأعمدة الـ $(n - 1)$ الأخيرة إلا أنها لا تؤثّر في قابليتها للقسمة على a_{11}. والآن نقسم الصف الأول من المصفوفة على معامل الحد الرئيس من a_{11}، لنصل إلى مصفوفة $- \lambda$:

$$\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix} \tag{54.3}$$

حيث $e_1(\lambda)$ عامل من عوامل كل عنصر من عناصر المصفوفة $B(\lambda)$ المربّعة $(n - 1) \times (n - 1)$، وأعلى معاملات $e_1(\lambda)$ هو الواحد.

إذا كان $n = 1$ فإن $B(\lambda)$ لا تكون موجودة. وفيما عدا ذلك، تكون رتبة $B(\lambda)$ بوضوح هي $(r - 1)$. ومنه وبما يتفق مع فرض الاستقراء، يمكننا بوساطة تحويلات أوّلية اختزال $B(\lambda)$ إلى الشكل:

$$\begin{bmatrix} e_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_3(\lambda) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_r(\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

حيث المقادير e تحقق شروط النظرية، وفضلاً عن ذلك، ووفقًا للنظرية (**٥٣ ـ ٣**)، فإن كلاً منها يقبل القسمة على $e_1(\lambda)$. بالإضافة إلى أن هذا الاختزال الأخير قد نُفِّذ بوساطة تحويلات أولية مطبقة على الصفوف والأعمدة الـ $(n-1)$ الأخيرة من (54.3) وبالتالي فإنها لا تؤثِّر في الاختزال الذي تمَّ لتوِّه على الصف الأول والعمود الأول.

إذا رمزنا بِـ $P_1, P_2, \ldots, P_k$ و$Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ لمصفوفات التحويل الأولي، التي تؤدِّي في حال ضربها بِـ $A(\lambda)$ من اليمين ومن اليسار، على الترتيب، إلى الاختزال الذي أجملناه منذ قليل، فيمكننا أن نكتب:

$$P_k \ldots P_2 P_1 A(\lambda)\, Q_1 Q_2 \ldots Q_l = N(\lambda) \tag{54.4}$$

أو

$$PAQ = N,$$

حيث إن $P = P_k \ldots P_1$ و $Q = Q_1 \ldots Q_l$ هما كثيرتا حدود ابتدائيتان. وهو المطلوب.

بما أن محدَّد كثيرة حدود ابتدائية هو عدد ثابت مختلف عن الصفر، فنجد من العلاقة (54.2) وبأخذ محدَّدات الطرفين:

$$|N(\lambda)| = k\,.\,|A(\lambda)|, \quad k \neq 0 \tag{54.5}$$

وفي الحالة الخاصة عندئذ التي تكون فيها $A(\lambda)$ نفسها كثيرة حدود ابتدائية، و$r = n$ و $|A(\lambda)|$ عدد ثابت مختلف عن الصفر، تصبح (54.5) :

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \ldots e_n(\lambda) = c \neq 0$$

وبالتالي فإن $e_i(\lambda) = 1$ ، $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ، بحيث يكون $N(\lambda) = I$. ومنه نجد النتيجة:

نتيجـة (٥٤ ـ ٢)

يمكن دائـماً، اختـزال كثـيرة حدود ابتـدائية إلى الصيغـة الناظمية I بوساطة تحويلات أوّلية .

وبالإضافة إلى ذلك، وباعتبار أن عكس تحويل أوّلي هو نفسه مصفوفة تحويل أولي فلدينا من (54.4):

نتيجـة (٥٤ ـ ٣)

يمكن التعبير عن كثيرة حدود ابتدائية كجداء مصفوفات تحويل أولي .

وكما في الفقرة ١٢ ، نعرّف حالة تكافؤ بين مصفوفتي λ – إذا أمكن الانتقال من إحداها إلى الأخرى بواسطة تحويلات أ ولية ، وهذا يسمح لنا بعرض النظرية :

نظريـة (٥٤ ـ ٤)

نقول إن مصفوفتي λ – مربعتين $n \times n$ ، $A(\lambda)$ ، و $B(\lambda)$ ، معاملات عناصرها من حقل $\mathscr{F}$ ، متكافئتان إذا، وفقط إذا، كانت توجد كثيرتا حدود ابتدائيتان $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ ، معاملات عنصارهما من حقل $\mathscr{F}$ ، بحيث إن

$$P(\lambda)\, A(\lambda)\, Q(\lambda) = B(\lambda).$$

ونترك البرهان للطالب .

٥٥ ـ العوامل اللامتغيرة في مصفوفة – λ

إن المحـدَّدات المصغرة الوحيدة من المصفوفة $N(\lambda)$ المذكورة في (54.1) ، غير المنعدمة ، ومن مرتبة $m \leqslant r$ هي من الشكل :

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} \quad (m = 1, 2, \dots, r) \tag{55.1}$$

حيث $i_1, i_2, \dots, i_m$ هي m من الأعداد المختارة من $1, 2, \dots, r$ بدون إعادة والتي يمكننا الافتراض بأنها مرتبة بحيث يكون $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. وبما أن $e_i(\lambda)$ هي عامل من عوامل $e_j(\lambda)$ إذا كان $i < j$ ، فمن الواضح أنَّ أيًّا من مثل هذه المحدَّدات في (55.1) قابلة للقسمة على :

$$d_m = e_1 e_2 \dots e_m \tag{55.2}$$

ولكن d_m نفسهـا هي إحـدى محدّدات N المصغـرة ذات الـ m صفًا وهي بالتالي القاسم

المشـترك الأعـظم لجميع هذه المحـدّدات المصغـرة ذات الـ m صفًا. ووفقًا للنظرية (**٥٣ ـ ٣**) يكون d_m أحد لامتغيّرات المصفوفة – λ تحت التحويلات الأولية. إذا عرفنا $d_0(\lambda)$ على أنها الواحد، فمن الواضح أن كثيرات الحدود

$$e_m(\lambda) = \frac{d_m(\lambda)}{d_{m-1}(\lambda)} \, (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{55.3}$$

هي مقادير لا متغيرة تحت التحويلات الأولية. وتدعى هذه المقادير $e_m(\lambda)$ بالعوامل اللامتغيرة للمصفوفة $N(\lambda)$ في (54.1) أو للمصفوفة المكافئة لها $A(\lambda)$. ونستخدم هنا تعبير التكافؤ بالمعنى المعرَّف في الفقرة **١٢**.

ويمكننا الآن عرض النظرية المهمة:

نظريـة (٥٥ ـ ١)

تتكـافـأ مصفوفتان مربّعتان $n \times n$، $A(\lambda)$ و $F(\lambda)$ إذا، وفقط إذا، كان لهما العوامل اللامتغيرة نفسها.

الشروط ضرورية باعتبـار أن العـوامـل الـلامتغيرة لا تتغير تحت التحويلات الأولية. والشروط كافية باعتبار أنّه إذا كان لـ $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ العوامل اللامتغيرة نفسها $e_m(\lambda)$ حيث $(m = 1, 2, \ldots, r)$، فعندئذ تكون كل منهما مكافئة لصيغة سميث (Smith) الناظمية $N(\lambda)$ نفسها والمذكورة في (54.1).

٥٦ ـ القواسم الابتدائية لمصفوفة – λ

لتكن $A(\lambda)$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ ولنفرض أن لكثيرات الحدود $a_{ij}(\lambda)$ معاملات من حقل الأعداد المركّبة $\mathscr{F}$. فعوامل لا متغيرة كـ $e_m(\lambda)$، $(m = 1, 2, \ldots, m)$، والتي لا تكون مساوية لـ $1+$، يمكن تحليلها في $\mathscr{F}$ إلى جداءات قوى عوامل خطّية متميزة، وهكذا، يمكننا أن نكتب من أجل $e_r(\lambda) \neq 1$:

$$\begin{aligned}
e_1(\lambda) &= (\lambda - \alpha_1)^{r_{11}}(\lambda - \alpha_2)^{r_{12}} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{r_{1s}}, \\
e_2(\lambda) &= (\lambda - \alpha_1)^{r_{21}}(\lambda - \alpha_2)^{r_{22}} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{r_{2s}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
e_r(\lambda) &= (\lambda - \alpha_1)^{r_{r1}}(\lambda - \alpha_2)^{r_{r2}} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{r_{rs}},
\end{aligned} \tag{56.1}$$

حيث $\nu_{r1}, \nu_{r2}, \ldots, \nu_{rs}$ هي جميعها أكبر من الصفر، $\nu_{mi} \geqslant 0$ ($m = 1, 2, \ldots, r-1$ ، $i = 1, 2, \ldots, s$) وبما أن $e_1(\lambda)$ عامل لجميع المقادير e التي تليه فلدينا

$$\nu_{1i} \leqslant \nu_{2i} \leqslant \ldots \leqslant \nu_{ri} \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{56.2}$$

والعبارات مثل

$$(\lambda - \alpha_i)^{\nu_{ri}}, (\lambda - \alpha_i)^{\nu_{r-1,i}}, \cdots, (\lambda - \alpha_i)^{\nu_{2i}}, (\lambda - \alpha_i)^{\nu_{1i}} \quad (i = 1, 2, \cdots, s) \tag{56.3}$$

التي لا تُختزل إلى 1 ، أي أن قواها أكبر من الصفر، تدعى القواسم الابتدائية للمصفوفة $N(\lambda)$ في (54.1) أو للمصفوفة المكافئة $A(\lambda)$ ، الموافقة للجذر α_i من جذور $e_r(\lambda) = 0$. وبما أن العوامل اللامتغيرة $e_m(\lambda)$ لا تتغير تحت التحويلات الأولية، فمن الواضح أن القواسم الابتدائية لا متغيرة، هذا مع أن الأخيرة يمكن أن تكون غير نسبية، بينما السابقة هي مقادير نسبية.

وليست العوامل اللامتغيرة $e_1(\lambda), \ldots, e_r(\lambda)$ هي فقط التي تحدد الرتبة r والقواسم الابتدائية في (56.3) للمصفوفة $-\lambda$ ، ولكن، على العكس فإن الرتبة r والقواسم الابتدائية تحدد العوامل اللامتغيرة. وفي الحقيقة، في مقابل كل من العوامل الخطِّية المتميزة $\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \ldots, \lambda - \alpha_s$ ننتقي من (56.3) تلك التي يكون لها أكبر قوة، مثلاً $(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}, \ (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2}, \ldots, (\lambda - \alpha_s)^{\nu_s}$. فجداء هذه العبارات هو $e_r(\lambda)$. أي أن $e_r(\lambda)$ هو المضاعف المشترك البسيط، مأخوذًا بمعاملات تساوي 1 للحد الرئيس، لجميع القواسم الابتدائية. وبعد حذف عوامل $e_r(\lambda)$ من القواسم الابتدائية في (56.3) يكون المضاعف المشترك البسيط للقواسم الابتدائية الباقية هو $e_{r-1}(\lambda)$ ، وهكذا. وإذا استنفدنا جميع القواسم الابتدائية في الوقت الذي نكون قد أنشأنا فيه $t < r$ من العوامل اللامتغيرة فإننا نعتبر العوامل اللامتغيرة الـ $r - t$ الباقية $e_{r-t}, \ldots, e_2, e_1$ مساوية للواحد.

توضيح : مصفوفة $-\lambda$ مربّعة 5×5 رتبتها 4 وقواسمها الابتدائية هي :

$$\lambda^2, \lambda, (\lambda - 1)^3, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1), (\lambda + 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1), (\lambda + 2)^4, (\lambda + 2)^5$$

أوجد العوامل اللامتغيرة واكتب صيغة سميث (Smith) الناظمية.

لإيجاد $e_4(\lambda)$ ، نكتب المضاعف المشترك البسيط للقواسم الابتدائية، فنجد:

$$e_4(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 1)^3 (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)^5.$$

وبعد حذف العوامل الداخلـة في تشكيل $e_4(\lambda)$ من قائمة القواسم الابتدائية، يكون $e_3(\lambda)$ هو المضاعف المشترك البسيط لما تبقى منها أي أن

$$e_3(\lambda) = \lambda (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1) (\lambda + 2)^4.$$

وأيضًا

$$e_2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

وبما أننا قد استنفدنا الآن جميع عناصر القائمة المعطاة من القواسم الابتدائية، نأخذ $e_1 = 1$ باعتبار $r = 4$.

وصيغة سميث الناظمية هي إذن

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2)^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2(\lambda+2)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وفي الحـالـة التي يكـون فيهـا لـ $e_r(\lambda)$ عوامـل خطّية متميّزة، فيكـون لكـل $e_m(\lambda)$ غير مساوٍ لعدد ثابت عوامل خطّية متميزة. ويُقال إن للمصفوفة λ – في هذه الحالة قواسم ابتدائية خطّية أو بسيطة.

وعلى العكس، إذا كان للمصفوفة $A(\lambda)$ قواسم ابتدائية بسيطة فعندئذ يكون لـ $e_r(\lambda)$ المضـاعف المشترك البسيط للقواسم الابتدائية، عوامل خطّية متميّزة فقط. وهكذا نجد النظرية:

نظريـة (٥٦ ـ ١)

يكـون لمصفـوفـة $A(\lambda)$ رتبتهـا r قواسم ابتدائية بسيطة إذا، وفقط إذا، كان لـ $e_r(\lambda)$ عوامل خطّية متميّزة فقط.

وبضم النظريتين (٥٤ ـ ٤) و(٥٥ ـ ١) مع نتائج هذه الفقرة، ننتهي إلى النظرية:

نظريـة (٥٦ ـ ٢)

لتكن $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ مصفـوفتـين مربّعتـين $n \times n$ فوق حقـل $\mathscr{F}$. فالشرط الـلازم والكـافي لتكـافؤ $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ ، أو بعبـارة أخـرى، الشرط اللازم والكافي لكي توجـد كثـيرتـا حدود ابتـدائيتان $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$ بحيث: إن $PAQ = B$ هو أن يكـون لِـ $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ العوامل اللامتغيرة نفسها، أو أن يكون للمصفوفتين $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ الرتبة والقواسم الابتدائية نفسها.

وغـالبًـا ما سنجـد النـظريتـين التاليتين مفيدتين في تحديد القواسم الابتدائية لمصفوفة $-\lambda$.

نظريـة (٥٦ ـ ٣)

إذا كانت كل عنـاصر مصفـوفة $-\lambda$ أصفارًا باستثناء تلك الموجودة في القطر الـرئيس، وإذا حُلِّل كلٍ عنصر غير ثابت من القـطر الـرئيس إلى جداء عدد ثابت بجـداء قوى عوامـل خطِّية متميزة $(\lambda - \alpha_1)^{\nu_{11}}$ و $(\lambda - \alpha_2)^{\nu_{21}}$ ، إلخ، فعندئذ تكون قوى هذه العوامل الخطِّية القواسم الابتدائية للمصفوفة.

وعند برهان هذه النظرية نعتبر العامل $\lambda - \alpha_1$ فقط ونفرض أن المصفوفة هي

$$\begin{bmatrix} q_1(\lambda-\alpha_1)^{\nu_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & q_2(\lambda-\alpha_1)^{\nu_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_r(\lambda-\alpha_1)^{\nu_r} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{56.5}$$

حيث $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_r$ ، $(\nu_r \neq 0)$ ولا تكـون أي من المقـادير q قابلـة للقسمـة على $\lambda - \alpha_1$. وكـل محدَّد مصغَّـر غير منعدم ذي m صفًا من هذه المصفوفة يساوي جداء $m\ (m \leqslant r)$ من الحدود القطرية وهو بالتالي من الشكل

$$q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_m} (\lambda - \alpha_1)^{\nu_{i_1} + \nu_{i_2} + \cdots + \nu_{i_m}}, \tag{56.6}$$

حيث $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ هو اختيار لِـ m من الأعداد $1, 2, \ldots, r$. وبما أن $(\lambda - \alpha_1)^{\nu_{i+1}}$

قابلة للقسمة على $(\lambda - \alpha_1)^{\nu_i}$ فمن الواضح أن الجداء في (56.6) قابل للقسمة على

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m}. \qquad (56.7)$$

ولكن المحدَّد من المرتبة m القابع في الزاوية العليا اليسرى من (56.5) لا يحوي قوة أعلى لـ $(\lambda - \alpha_1)$. وبالتالي فإن القاسم المشترك الأعظم d_m لجميع المحدَّدات المصغَّرة ذات الـ m صفًّا في (56.6) يحوي العامل (56.7) دون أن يحوي قوة أعلى في $(\lambda - \alpha_1)$. وبصورة مماثلة فإن d_{m-1} قابل للقسمة على $(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1+ \cdots +\nu_{m-1}}$ ولا يقبل القسمة على أي قوة أعلى، بحيث يكون $e_m(\lambda) = \dfrac{d_m(\lambda)}{d_{m-1}(\lambda)}$ قابلاً للقسمة على $(\lambda - \alpha_1)^{\nu_m}$ ولا يقبل القسمة على أي قوة أعلى. والقواسم الابتدائية لِـ $A(\lambda)$ الموافقة لِـ $\lambda - \alpha_1$ هي إذن

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_r}, (\lambda - \alpha_1)^{\nu_{r-1}}, \cdots, (\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}.$$

ولدينا أيضًا النظرية :

نظريـة (٥٦ ـ ٤)

إذا كانت كل عناصر مصفوفة $A(\lambda)$ أصفارًا باستثناء تلك الواقعة في عدد معيَّن من المصفوفات المصغَّرة الأساسية المنفصل بعضها عن بعض، فيمكن إيجاد القواسم الابتدائية لِـ $A(\lambda)$ بتجميع القواسم الابتدائية لهذه المصفوفات المصغَّرة الأساسية .

ذلك لأنه دون تغيير القواسم الابتدائية لأي من المصفوفات الفرعية أو المصفوفة $A(\lambda)$ نفسهـا، يمكننا بوساطة تحويلات أوّلية مناسبة اختزال كل مصفوفة فرعية إلى صيغة سميث الناظمية. وتنتج صحة النظرية (٥٦ ـ ٤) عندئذ بالاستفادة من النظرية (٥٦ ـ ٣) .

٥٧ ـ مُميَّز سيجـر (Segre)

في بعض الحـالات تكون درجات القواسم الابتدائية أكثر أهمية من القواسم نفسها. وسنرى أن الحالة كذلك في تصنيف التساقطات "collineations" (فقرة ٧٢) . وقد اقترح سيجر (Segre) كتابة قوى القواسم الابتدائية الموافقة للعامل $\lambda - \alpha_i$ كعناصر في الصف i من مصفوفة $r \times s$ ، وهكذا نكتب:

$$\begin{bmatrix} \nu_{r1} & \nu_{r-11} & \cdots & \nu_{21} & \nu_{11} \\ \nu_{r2} & \nu_{r-12} & \cdots & \nu_{22} & \nu_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{ri} & \nu_{r-1i} & \cdots & \nu_{2i} & \nu_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{rs} & \nu_{r-1s} & \cdots & \nu_{2s} & \nu_{1s} \end{bmatrix} \quad (57.1)$$

وتُعرف هذه المصفوفة بمميَّز سيجر (Segre) للمصفوفة $A(\lambda)$. وإذا كان الجذر α_i صفرًا، فمن المهم أحيانًا التأكيد على هذه الحقيقة بكتابة صفر فوق القوى الموافقة. وهكذا إذا كان $\alpha_1 = 0$ ، فينبغي كتابة الصف الأول في (53.1) كما يلي:

$$\nu^0_{r1}\, \nu^0_{r-11} \ldots \nu^0_{21}\, \nu^0_{11}.$$

وكثيرًا ما يُكتب مميَّز سيجر (Segre) ، ليس على شكل مصفوفة، ولكن كما يلي:

$$[(\nu_{r1}\nu_{r-11} \cdots \nu_{11}), (\nu_{r2}\nu_{r-12} \cdots \nu_{12}), \cdots, (\nu_{rs}\nu_{r-1s} \cdots \nu_{1s})], \quad (57.2)$$

حيث نضع القوى الموافقة للجذر نفسه بين قوسين هلاليين، ونحذف القوى التي تكون مساوية للصفر.

وهكذا يمكن كتابة مميَّز سيجر (Segre) من أجل المصفوفة $\lambda -$ في (56.4) في أي من الشكلين:

$$\begin{bmatrix} \overset{0}{2} & \overset{0}{1} & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad [(\overset{0}{2}\ \overset{0}{1})(3\ 2\ 1)(5\ 4)(2\ 1\ 1)].$$

تمارين

من أجل كل من الأزواج التالية من المصفوفات $A(\lambda)$ ، $B(\lambda)$ ، أوجد $Q(\lambda)$ ، $R(\lambda)$ و $Q_1(\lambda)$ ، $R_1(\lambda)$ التي تحقق شروط النظريتين (52.2) و (52.3):

١) $A = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda & \lambda^2 + 3\lambda \\ -\lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 3 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

٢) $A = \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda^2 + \lambda & \lambda + 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -\lambda + 1 \\ \lambda + 1 & 3 \end{bmatrix}$

حدِّد العوامل اللامتغيرة والقواسم الابتدائية لكل من المصفوفات – λ التالية. واستخدم ذلك لكتابة مميِّز سيجر (Segre) وصيغة سميث الناظمية من خلال التجربة والخطأ. وباستخدام التحويلات الأوّلية اختزل كل مصفوفة إلى صيغة سميث (Smith) الناظمية.

٣) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

٦) $\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$

٨) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 3\lambda + 1 & 4 & 5 \\ 1 + 4\lambda - \lambda^2 & 4 - \lambda & 5 \\ 2 + 8\lambda - \lambda^2 & 8 - \lambda & 10 + \lambda \end{bmatrix}$

١٠) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ -4 & 0 & 5 & \lambda \end{bmatrix}$

١١) $\begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 - \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda + 2 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & \lambda^2 - \lambda - 1 \end{bmatrix}$

١٢) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

١٣)
$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \lambda + 1 & \lambda(\lambda - 1) & (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \\ \lambda - 1 & \lambda - 1 & (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \\ \lambda^2 - \lambda + 1 & \lambda^2 - 2 & \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

١٤)
$$\begin{bmatrix} \lambda - a & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a & 0 & 0 & -1 \\ b^2 & 1 & 0 & \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 1 & 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

١٥) إذا كانت $A(\lambda)$ مصفوفة 5×5 رتبتها 4 ومميِّز سيجر (Segre) الموافق لها هو $[(\overset{0}{3}\ \overset{0}{1})\ (2\ 2\ 1)\ (1\ 1)]$ ، فاكتب صيغة سميث (Smith) الناظمية لِـ $A(\lambda)$.

الفصل الثالث عشر

تكافؤ أزواج من المصفوفات

٥٨ ـ نظرية وايرستراس[*]

لتكن A ، B ، C و D أربع مصفوفات مربّعة $n \times n$ عناصرها من حقل $\mathcal{F}$ ، وبالإضافة إلى ذلك لتكن A و C غير شاذتين. ولنتساءل عن الشروط التي توجد تحتها مصفوفتان غير شاذتين P و Q ، عناصرهما من $\mathcal{F}$ ، بحيث يكون، وفي الوقت نفسه،

$$PBQ = D \text{ و } PAQ = C \tag{58.1}$$

وتجيب النظرية التالية عن هذا التساؤل.

نظريـة (٥٨ ـ ١)

إذا كانت A ، B ، C و D أربع مصفوفات مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathcal{F}$ ، وإذا كانت A و C غير شاذتين، فالشرط اللازم والكافي لوجود مصفوفتين غير شاذتين P و Q ، عناصرهما في $\mathcal{F}$ ، بحيث يكون $PAQ = C$ ، $PBQ = D$ هو أن يكون للمصفوفتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ القواسم الابتدائية نفسها، أو، إذا أردنا، العوامل اللامتغيرة نفسها.

من الواضح أن الشرط المعروض في النظرية ضروري. ذلك لأنه إذا صحّت العلاقة (58.1) فيجب أن يكون لدينا عندئذ من أجل كل λ

$$P(\lambda A + B)Q = \lambda C + D. \tag{58.2}$$

(*) Karl Weierstrass, (1815 - 1897).

وبالتالي فإنه وفقًا للنظرية (**٥٦ ـ ٢**) يجب أن يكون للمصفوفتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ القواسم الابتدائية نفسها. وبما أن A و C هما بالفرض غير شاذتين فيكون للمصفوفتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ الرتبة n نفسها، وبالتالي، وباعتبار أن لهما القواسم الابتدائية نفسها، فإن لهما أيضًا العوامل اللامتغيرة نفسها.

وعلى العكس، لنفرض أن للمصفوفتين:

$$M = \lambda A + B, \quad N = \lambda C + D. \tag{58.3}$$

القواسم الابتدائية نفسها وبالتالي العوامل اللامتغيرة نفسها. فعندئذ، ووفقًا للنظرية (**٥٦ ـ ٢**)، توجد كثيرتا حدود ابتدائيتان P_0 و Q_0 بحيث إن

$$P_0 M Q_0 = N, \tag{58.4}$$

أو

$$P_0 M = N Q_0^{-1} \tag{58.5}$$

وبالاستناد إلى النظرية (**٥٢ ـ ٢**) يمكن تقسيم P_0 على N لنحصل على حاصل قسمة P_1 وباق P، وعناصر هذا الأخير مستقلة عن λ، حيث يكون

$$P_0 = N P_1 + P \tag{58.6}$$

وبما أن Q كثيرة حدود ابتدائية، فتكون Q_0^{-1}، وفقًا للنظرية (**٥٣ ـ ١**)، كثيرة حدود ابتدائية. ولذلك فإنه يمكن قسمة هذه الأخيرة على M لنجد

$$Q_0^{-1} = S_1 M + S, \tag{58.7}$$

حيث S مستقلة عن λ. وبالتعويض من (58.6) و (58.7) في (58.5) نجد

$$N P_1 M + P M = P_0 M = N Q_0^{-1} = N S_1 M + N S,$$

ومنه

$$N (P_1 - S_1) M = N S - P M.$$

إذا كان $P_1 - S_1 \neq 0$، فإن الطرف الأيسر من هذه المعادلة الأخيرة يكون من الدرجة 2 على الأقل، بينما درجة الطرف الأيمن هي الواحد على الأكثر. ومنه $P_1 - S_1 = 0$ وبالتالي

$$NS = PM \tag{58.8}$$

ونبيِّن الآن أن P و S غير شاذَّتين . ففي المطابقة $I = Q_0Q_0^{-1}$ نعوِّض P_0^{-1} بقيمتها $S_1M + S$ من (58.7) فنحصل على

$$I = Q_0S_1M + Q_0S \qquad (58.9)$$

لنقسم الآن Q_0 على N فنجد

$$Q_0 = Q_1N + Q \qquad (58.10)$$

حيث لا تحوي Q المقدار λ . وعندما نبدل هذه القيمة لِـ Q_0 في (58.9) نجد

$$I = Q_0S_1M + Q_1NS + QS,$$

أو، باعتبار أن $NS = PM$ كما وجدنا في (58.8) ،

$$I - QS = (Q_0S_1 + Q_1P)\, M$$

ومن هذه العلاقة نستنتج أن $Q_0S_1 + Q_1P = 0$ وبالتالي

$$QS = I.$$

ومنه $S = Q^{-1}$ غير شاذ، ومن (58.8)

$$PMQ = N,$$

أي أن

$$P(\lambda A + B)\, Q = \lambda C + D.$$

وبما أن Q, P لا تحويان λ فإن هذا يعطي

$$PAQ = C \text{ و } \quad PBQ = D$$

ويتضح الآن أنه يمكن الحصول على المصفوفتين P و Q كباقيين عند قسمة P_0 و Q_0 على N [انظر المعادلتين (58.6) و (58.10)]. ومنه نجد أنه إذا كانت عناصر A ، B ، C و D واقعة في حقل $\mathscr{F}$. فكذلك الأمر بالنسبة لعناصر P و Q . وهو المطلوب.

٥٩ ـ شروط أن تكون مصفوفتان متشابهتين

الحالة ذات الأهمية الكبيرة والمفيدة هي تلك التي نأخذ فيها المصفوفتين A و C على أنهما المصفوفة المحايدة مسبوقة بإشارة ناقص، أي $A = C = -I$. وفي هذه الحالة تُختزل M و N إلى $B - \lambda I$ و $D - \lambda I$ ، مميِّزي المصفوفتين B و D على الترتيب. وتقود عندئذ النظرية (٥٨ ـ ١) إلى النتيجة التالية الخاصة ولكن المهمة.

نظريـة (٥٩ ـ ١)

إذا كانت B و D مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل $\mathscr{F}$ ، فالشرط اللازم والكافي لوجود مصفوفة غير شاذة P ، عناصرها في $\mathscr{F}$ ، بحيث إن $P^{-1}BP = D$ هو أن يكون للمصفوفتين المميَّزتين لـ B و D العوامل اللامتغيرة نفسها . أو، باعتبار أن $B - \lambda I$ و $D - \lambda I$ كلتيهما غير شاذتين، أن يكون للمصفوفتين المميَّزتين القواسم الابتدائية نفسها .

ضرورة الشرط واضحة تقريبًا . ذلك لأنه إذا كان $P^{-1}BP = D$ فعندئذ، وباعتبار أن $P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I$ من أجل كل قيمة للعدد السلّمي λ ، لدينا

$$P^{-1}(B - \lambda I)P = D - \lambda I$$

وبالاستناد إلى النظرية (٥٦ ـ ٢) يكون للمصفوفتين $B - \lambda I$ و $D - \lambda I$ العوامل اللامتغيرة نفسها وبالتالي القواسم الابتدائية نفسها .

وعلى العكس، ليكن لـ $B - \lambda I$ و $D - \lambda I$ القواسم الابتدائية نفسها، وبالتالي العوامل اللامتغيرة نفسها . فبالاستناد إلى النظرية (٥٨ ـ ١) توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q ، عناصرهما في $\mathscr{F}$ بحيث إن

$$P(D - \lambda I)Q = B - \lambda I$$

وبما أن هذه العلاقة الأخيرة تصح من أجل كل λ فيجب أن يكون :

$$PDQ = B, \quad PQ = I$$

ومنه $Q = P^{-1}$ ، بحيث يكون

$$P^{-1}BP = D, \quad PDP^{-1} = B \tag{59.1}$$

وهو المطلوب .

نتذكر من الفقرة **٢٥** أن مصفوفتين مربعتين B و D ، تحققان الشرط (59.1) هما مصفوفتان متشابهتان . وفضلاً عن ذلك، عند التحدث عن القواسم الابتدائية أو العوامل اللامتغيرة للمصفوفة المميَّزة لمصفوفة مربّعة B ، نشير إليها غالبًا كقواسم ابتدائية أو عوامل لامتغيرة للمصفوفة B نفسها . وبهذه اللغة يمكننا إعادة صياغة النظرية (٥٩ ـ ١) كما يلي :

نظريـة (٥٩ ـ ٢)

الشرط اللازم والكافي لتكون مصفوفتان مربّعتان B و D متشابهتين هو أن يكون للمصفوفة القواسم الابتدائية نفسها، أو إذا أردنا، العوامل اللامتغيرة نفسها.

تماريــن

في كل من التمارين التالية، لدينا أربع مصفوفات A ، B ، C و D ، منها A و C غير شاذتين حدِّد في كل حالة ما إذا كان يوجد أو لا يوجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث إن $PAQ = C$ ، $PBQ = D$.

١) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix};$$

٢) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} +1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};$$

٣) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix};$$

٤) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 18 & 27 & 29 \end{bmatrix};$$

٥) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$



الفصل الرابع عشر

الدالة المميزة
المختزلة لمصفوفة

٦٠ ـ نظرية الباقي من أجل المصفوفات

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في $\mathcal{F}$ ولتكن

$$B(\lambda) = B_0 \lambda^s + B_1 \lambda^{s-1} + \ldots + B_s \qquad (60.1)$$

كثيرة حدود من الدرجة s معاملاتها B_i مصفوفات مربّعة $n \times n$ عناصرها في $\mathcal{F}$. ومعامل الحد الرئيس في $A + \lambda I -$ ، المصفوفة المميَّزة لـ A ، هو بوضوح غير شاذ بحيث يمكن، وفقًا للنظريتين (٥٢ ـ ٢) و (٥٢ ـ ٣)، كتابة

$$B(\lambda) = Q(\lambda)(A - \lambda I) + R = (A - \lambda I) Q_1(\lambda) + R_1, \qquad (60.2)$$

حيث Q و Q_1 كثيرتا حدود مصفوفيتان من الدرجة $s - 1$ ومعاملاتها مصفوفات، بينما R و R_1 لا يحويان λ .

ويمكننا الآن إقامة البرهان على النظرية:

نظريـة (٦٠ ـ ١) (نظرية الباقي)

إذا قسّمنا كثيرة الحدود المصفوفية في (60.1) على $A - \lambda I$ كما في (60.2) حتى يتم الحصول على الباقيين R و R_1 اللذين لا يحويان λ ، فعندئذ يكون

$$R = B_0 A^s + B_1 A^{s-1} + \ldots + B_{s-1} A + B_s, \qquad (60.3)$$

و

$$R_1 = A^s B_0 + A^{s-1} B_1 + \ldots + A B_{s-1} + B_s. \qquad (60.4)$$

سنبرهن (60.3) فقط، ويمكن البرهان على (60.4) بطريقة مشابهة. لدينا مباشرة

$$B(\lambda) - R = B_0(\lambda^s I - A^s) + B_1(\lambda^{s-1} I - A^{s-1}) + \ldots + B_{s-1}(\lambda I - A) \qquad (60.5)$$

وبما أنه يمكن مبادلة A مع λI ومع A مرفوعة لأي قوة، تمامًا كأي عدد سلَّمي، فلدينا كما في الجبر العادي

$$\lambda^m I - A^m = (\lambda^{m-1} I + \lambda^{m-2} A + \ldots + A^{m-1})(\lambda I - A)$$

وبالتالي فإن كل حد من الطرف الأيمن من (60.5) قابل للقسمة على $\lambda I - A$، وخارج القسمة هو كثيرة حدود معاملاتها مصفوفات. ولدينا إذن

$$B(\lambda) - R = Q(\lambda)(A - \lambda I)$$

بحيث تصحّ العلاقة الأولى في (60.2) مع R كما هي معطاة في (60.3). وفضلاً عن ذلك، ووفقًا للنظرية (٥٢ ـ ٢) يكون الباقي وحيدًا.

وسندعو R الباقي الأيمن و R_1 الباقي الأيسر عند القسمة على $A - \lambda I$.

وفي الحالة التي تكون فيها $B(\lambda)$ كثيرة حدود سلَّمية

$$g(\lambda) I = b_0 I \lambda^s + b_1 I \lambda^{s-1} + \ldots + b_{s-1} I \lambda + b_s I, \qquad (60.6)$$

يكون الباقيان متطابقين، ولدينا عندئذ:

$$R = R_1 = b_0 A^s + b_1 A^{s-1} + \ldots + b_{s-1} A + b_s I$$

نرمز لهذا الباقي بـ $g(A)$، كما نجد النظرية التالية:

نظريـة (٦٠ ـ ٢) (نظرية الباقي من أجل مصفوفات سلَّمية)

إذا قسمنا كثيرة حدود سلَّمية معاملاتها مصفوفات $g(\lambda) I$ على $A - \lambda I$ حتى الحصول على باق R لا يحوي λ، فسنجد عندئذ $R = g(A)$.

وكنتيجة للنظرية (٦٠ ـ ٢) نجد مباشرة النظرية التالية:

نظريـة (٦٠ ـ ٣) (نظرية التحليل إلى عوامل من أجل مصفوفات سلَّمية)

تقبل كثيرة الحدود السلَّمية $g(\lambda) I$ التي معاملاتها مصفوفات القسمة على $A - \lambda I$ إذا، وفقط إذا، كان $g(A) = 0$.

٦١ ـ نظرية كايلي هاميلتون Cayley - Hamilton

لنرمز بـ $f(\lambda)$ للدالّة المميّزة $|A - \lambda I|$ لـ A. وإذا رمزنا الآن بـ $adj(A - \lambda I)$ للمصفوفة القرينة لـ $A - \lambda I$ كما عرفناها في الفقرة ١٧، فمن

الواضح أن $adj\,(A - \lambda I)$ هي كثيرة حدود معاملاتها مصفوفات ولدينا وفقًا لِـ (17.3):

$$(A - \lambda I)\,.\,adj\,(A - \lambda I) = f(\lambda)\,I. \qquad (61.1)$$

ومن هذه العلاقة الأخيرة نرى أن كثيرة الحدود السلَّمية $f(\lambda)$ قابلة للقسمة على $A - \lambda I$. وبالتالي فإن $f(A) = 0$ وفقًا للنظرية (٦٠ ـ ٣). وهكذا نكون قد برهنا النظرية:

نظريـة (٦١ ـ ١) (نظر ية كايلي هاملتون)

لتكن A مصفوفة مربّعة عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. إذا كانت $f(\lambda)$ الدالة المميَّزة $|A - \lambda I|$ لِـ A ، فعندئذ $f(A) = 0$ ، أي أن كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميَّزة.

نظرية كايلي هاملتون هي واحدة من أشهر النظريات في بحث المصفوفات.

توضيـح: إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، فعندئذ $f(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 11$. ومنه:

$$f(A) = A^2 - 6A + 11I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ -18 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٦٢ ـ الدالة المميَّزة المختزلة

رأينا سابقًا أن كل مصفوفة مربّعة A تحقق دالتها المميَّزة الخاصة. وعلى أي حال، فكثيرًا ما تكون الأخيرة ليست المعادلة السلَّمية ذات الدرجة الأدنى التي تحققها A . ونبرهن النظرية المهمة التالية:

نظريـة (٦٢ ـ ١)

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها من حقل $\mathscr{F}$. ولتكن $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ الدالة المميَّزة لِـ A . لنرمز بـ $\theta(\lambda)$ للقاسم المشترك الأعظم، مأخوذًا بحيث يكون معامل الحد الرئيس فيه له معامل الحد الرئيس نفسه في $f(\lambda)$ ، لجميع المحدّدات المصغّرة ذات الـ $(n-1)$ صفًا في $A - \lambda I$. إذا عرفنا الآن

$$\phi(\lambda) = f(\lambda) / \theta(\lambda) \qquad (62.1)$$

فلدينا

(i) $\phi(A) = 0$ ،

(ii) $\phi(\lambda) = 0$ هي المعادلة السلَّمية ذات الدرجة الأدنى التي تحقِّقها A ،

(iii) إذا كانت $\psi(\lambda) = 0$ أي معادلة سلَّمية تحقِّقها A ، فعندئذ تكون $\psi(\lambda)$ قابلة للقسمة على $\phi(\lambda)$ ،

(iv) إذا كانت العوامل اللامتغيرة للمصفوفة $A - \lambda I$ هي $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$ فعندئذ $\phi(\lambda) = e_n(\lambda)$.

(v) كل جذر لـ $f(\lambda) = 0$ هو جذر لـ $\phi(\lambda) = 0$.

قبل كل شيء نلاحظ بوضوح أن $\theta(\lambda)$ هو عامل من عوامل $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ ، باعتباره عاملاً لجميع المحدّدات المصغرة ذات الـ $(n - 1)$ صفًا في $A - \lambda I$ ، وبالتالي يكون $\phi(\lambda)$ كثيرة حدود. وبالإضافة إلى ذلك، وبسبب اختيار معامل الحد الرئيس في $\theta(\lambda)$ ، يكون معامل الحد الرئيس في $\phi(\lambda)$ هو الواحد. وفضلاً عن ذلك، وباعتبار أن المحدَّدات المصغَّرة ذات الـ $(n - 1)$ صفًّا من $A - \lambda I$ هي، باستثناء ما قد يتعلق بالإشارة، عناصر من $adj(A - \lambda I)$ ، فإن كل عنصر من $\dfrac{adj(A - \lambda I)}{\theta(\lambda)}$ هو كثيرة حدود، أي أن هذه الأخيرة هي مصفوفة λ – . ولدينا الآن من (61.1) أن

$$(A - \lambda I)\,\frac{\text{adj}\,(A - \lambda I)}{\theta(\lambda)} = \frac{f(\lambda)}{\theta(\lambda)}\,I = \phi(\lambda) I. \qquad (62.2)$$

ومنه نرى أن كثيرة الحدود السلّمية $\phi(\lambda) I$ قابلة للقسمة على $A - \lambda I$. وبالاستناد، إلى النظرية (٦٠ ـ ٣) نرى أن $\phi(\lambda) = 0$ ونكون قد برهنا بالتالي (i).

بعد ذلك لنفرض أن $\chi(\lambda) = 0$ المعادلة السلّمية ذات الدرجة الأدنى التي تحققها A ، ولنقسم $\phi(\lambda)$ على $\chi(\lambda)$ ، فنجد

$$\phi(\lambda) = q(\lambda)\,\chi(\lambda) + R(\lambda) \qquad (62.3)$$

حيث $R(\lambda)$ هي من درجة أقل من $\chi(\lambda)$ ، إن لم تكن صفرًا. وبتعويض λ بـ A في (62.3) نجد على الفور أن $R(A) = 0$. وبما أن $\chi(\lambda) = 0$ هي المعادلة ذات الدرجة الأدنى التي تحققها A ، ما لم يكن $R = 0$ ، فإن هذا يقودنا إلى تناقض. وبما أن $\phi(\lambda)$ قابلة للقسمة

على $\chi(\lambda)$ فإن (62.3) تصبح

$$\phi(\lambda) = q(\lambda)\chi(\lambda). \tag{62.4}$$

والآن، ووفقًا للنظرية (٦٠ ـ ٣)، فإن $\chi(\lambda) I$ قابلة للقسمة على $A - \lambda I$. ولذلك يمكننا أن نكتب:

$$\chi(\lambda) I = (A - \lambda I)\, G(\lambda) \tag{62.5}$$

حيث $G(\lambda)$ كثيرة حدود سلّمية. وباستخدام (62.4) و (62.5) في (62.2) نحصل على:

$$(A - \lambda I)\frac{\operatorname{adj}(A - \lambda I)}{\theta(\lambda)} = q(\lambda)\chi(\lambda) I = q(\lambda)(A - \lambda I)G(\lambda),$$

ومنه، باعتبار أن $A - \lambda I$ غير شاذة،

$$\frac{\operatorname{adj}(A - \lambda I)}{\theta(\lambda) q(\lambda)} = G(\lambda).$$

والطرف الأيمن من هذه المعادلة الأخيرة هو مصفوفة ـ λ . ويمكن أن يكون الطرف الأيسر كذلك، فقط إذا كان كل عنصر من $adj\,(A - \lambda I)$ قابلاً للقسمة على $\theta(\lambda)\, q(\lambda)$. ومنه $q(\lambda) = 1$ ، وهكذا نكون قد برهنا (ii).

ولبرهان (iii) نستخدم تمامًا المناقشة نفسها التي استخدمناها لتبيان أن $R = 0$ في

$$\phi(\lambda) = q(\lambda)\chi(\lambda) + R(\lambda), \tag{62.3}$$

وإذا رمزنا، كما في الفقرة ٥٣، بـ $d_m(\lambda)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ للقاسم المشترك الأعظم، مأخوذًا بمعامل يساوي 1 للحد الرئيس، لجميع المحدَّدات المصغَّرة ذات الـ m صفًّا في $A - \lambda I$. فمن الواضح أن $d_n(\lambda)$ و $d_{n-1}(\lambda)$ هما، باستثناء ما يمكن أن يتعلق بالإشارة، $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ و $\theta(\lambda)$ ، على الترتيب. ومنه وفقًا لتعريف «العامل اللامتغير» في (55.3)

$$e_n(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\theta(\lambda)} = \phi(\lambda),$$

وهو المطلوب في (iv).

وأخيراً لبرهان (v) لدينا من (55.2)

$$e_1(\lambda)\, e_2(\lambda) \ldots e_n(\lambda) = d_n(\lambda) = (-1)^n f(\lambda) \tag{52.6}$$

وبما أن $e_n(\lambda)$ يقبل القسمة على كل $e_i(\lambda)$ ، فمن الواضح أن كل عامل خطّي من الجداء في الطرف الأيسر هو بالضرورة عامل من عوامل $e_n(\lambda)$.

وهكذا نكون قد برهنا النظرية (٦٢ ـ ١) بكاملها.

وتدعى الدّالة $\phi(\lambda)$ الدّالة المميّزة المختزلة أو الدالّة الصغرى لِـ A كما تدعى المعادلة $\phi(\lambda) = 0$ المعادلة المميَّزة المختزلة أو المعادلة الصغرى لِـ A .

٦٣ ـ نظريات تتعلق بالدالّة المميّزة المختزلة

نظريـة (٦٣ ـ ١)

لتكن A مصفوفة غير شاذة عناصرها في $\mathcal{F}$. إذا كانت $\phi(\lambda)$ الدالّة المميَّزة المختزلة لِـ A من الدرجة v ، فيمكن التعبير عن معكوس A أي A^{-1} على شكل كثيرة حدود سلّمية من الدرجة $v-1$ في A .

ذلك لأنه إذا كتبنا

$$\phi(\lambda) = \lambda^{\nu} + a_1\lambda^{\nu-1} + a_2\lambda^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu}. \qquad (63.1)$$

فعنـدئـذ $a_{\nu} \neq 0$ ، باعتبـار أنـه، فيما عدا ذلـك، يمكن أن يكـون $\lambda = 0$ جذرًا للمعادلة $\phi(\lambda) = 0$ وبالتالي للمعادلة $f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$. ومن المعادلة :

$$\phi(A) = A^{\nu} + a_1 A^{\nu-1} \ldots + a_{\nu-1} A + a_{\nu} I = 0,$$

نجد بعد نقل $a_{\nu} I$ إلى الطرف الأيمن وقسمة الطرفين على $-a_{\nu}$ ،

$$-\frac{1}{a_{\nu}}[A^{\nu-1} + a_1 A^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} I]A = I.$$

ومنه

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_{\nu}}[A^{\nu-1} + a_1 A^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} I]. \qquad (63.2)$$

نظريـة (٦٣ ـ ٢)

إذا كانت $\phi(\lambda)$ الـدالّـة المميَّزة المختزلة لمصفوفة A ، وكان $g(\lambda)$ كثيرة حدود سلّمية في λ ، فسيكـون عنـدئذ $g(A)$ شاذًّا إذا، وفقط إذا، كان لِـ $g(\lambda)$ عامل مشترك $d(\lambda)$ ، من درجة أكبر أو يساوي الواحد، مع $\phi(\lambda)$.

لنفـرض أولاً أن لِـ $\phi(\lambda)$ و $g(\lambda)$ عامـلاً مشتركًا $d(\lambda)$. فيمكن عندئذ كتابة $\phi(\lambda) = d(\lambda)\psi(\lambda)$ و $g(\lambda) = d(\lambda)h(\lambda)$ ، حيـث $\psi(\lambda)$ و $h(\lambda)$ هما كثـيرتـا حدود. ومنه

$$g(A)\psi(A) = h(A)d(A)\psi(A) = h(A)\phi(A) = 0.$$

والآن $\psi(A) \neq 0$ باعتبار أن $\phi(\lambda)$ هو الدالة الصغرى لِـ A . وبالتالي يجب أن يكون $g(\lambda)$ شاذًا.

لنفرض بعد ذلك أن $g(\lambda)$ أوَّلي بالنسبة لِـ $\phi(\lambda)$. فعندئذ توجد كثيرتا حدود سُلَّميتان $m(\lambda)$ و $n(\lambda)$ ، والأولى من درجة $v - 1$ على الأكثر، بحيث إن

$$m(\lambda)\, g(\lambda) + n(\lambda)\, \phi(\lambda) \equiv 1^{(*)}$$

ومنه وباعتبار أن $\phi(A) = 0$ ، نجد

$$m(A)\, g(A) = I, \tag{63.3}$$

بحيث إن $g(A)$ غير شاذ. وفضلاً عن ذلك فإن $m(A)$ هو معكوس $g(A)$. وهكذا نكون قد برهنا ليس فقط النظرية (٦٣ ـ ٢) ولكن أيضًا النتيجة التالية:

نتيجة (٦٣ ـ ٣)

إذا كانت الدالّة المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda)$ لمصفوفة A من الدرجة v ، وإذا كانت كثيرة الحدود السلَّمية $g(\lambda)$ أوَّلية بالنسبة لِـ $\phi(\lambda)$ ، فعندئذ يكون $g(A)$ غير شاذ ويمكن التعبير عن $[g(A)]^{-1}$ على شكل كثيرة حدود في A من الدرجة $v - 1$ على الأكثر.

نتيجة (٦٣ ـ ٤)

إذا كانت $h(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرتي حدود سلَّميتين وكانت $g(\lambda)$ أوَّلية بالنسبة لِـ $\phi(\lambda)$ ، فإما أن تكون الدالة النسبية في A ، $h(A)/g(A)$ ، هي المصفوفة صفر أو أنه يمكن التعبير عنها على شكل كثيرة حدود في A من الدرجة $v - 1$ على الأكثر.

لبرهان هذه النتيجة الأخيرة، نلاحظ أولاً أنه إذا كانت $h(\lambda)$ قابلة للقسمة على $\phi(\lambda)$ فإن $h(A) = 0$. وفيما عدا ذلك، فإن $h(A)/g(A)$ يساوي جداء $h(A)$ بكثيرة حدود من درجة أصغر أو تساوي $v - 1$ ، وكثيرة الحدود هذه هي $[g(A)]^{-1}$. وإذا كان الجداء $p(A)$ من درجة أكبر أو تساوي v فلدينا بعد القسمة على $\phi(\lambda)$.

$$p(\lambda) = q(\lambda)\, \phi(\lambda) + \tau(\lambda),$$

(*) Fine, College Algebra, (Boston 1905), pp. 208-209.

حيث $\tau(\lambda)$ من درجة أصغر أو تساوي $v - 1$. ومنه نجد

$$p(A) = \tau(A),$$

وهذا يبرهن النتيجة (٦٣ ـ ٤).

والآن لتكن عناصر A في حقل $\mathscr{F}$ ولنفرض أن الدالة المميَّزة المختزلة $\bar{\phi}(\lambda)$ لِـ A غير قابلة للاختزال في $\mathscr{F}$. فإما أن تكون كل كثيرة حدود سلَّمية $g(\lambda)$ معاملاتها في $\mathscr{F}$ قابلة للقسمة على $\phi(\lambda)$ أو أنها أوَّلية بالنسبة لِـ $\phi(\lambda)$. أي أنه حسب ترتيب الحالتين، إما أن تكون $g(A) = 0$ أو أن لها مقلوبًا هو كثيرة حدود في A . ومنه نجد أن مجموعة كل كثيرات الحدود السلَّمية في A ، التي تكون معاملاتها في $\mathscr{F}$ ، تشكل حقلاً، ذلك لأنه من السهل التحقق من أن الشروط (1.1) ، ... ، (1.6) و (1.9) ملبَّاة.

نظريـة (٦٣ ـ ٥)

لتكن A مصفوفة مربعة عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. إذا كانت الدّالة المميّزة المختزلة $\phi(\lambda)$ لِـ A غير قابلة للاختزال في $\mathscr{F}$ ، فإن مجموعة كل كثيرات الحدود السلَّمية في A من درجة أصغر من أو تساوي $v - 1$ ، ومعاملاتها في $\mathscr{F}$ ، تشكِّل حقلاً.

توضيـح : الـدّالة المميّزة المختزلة لِـ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ هي $\lambda^2 + 1$ ، وهي غير قابلة للاختزال ضمن حقل الأعداد الحقيقية. ومنه فإن مجموعة كل كثيرات الحدود الخطِّية في A بمعاملات حقيقية، أي مجموعة كل المصفوفات من الشكل $xI + yA = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ ، حيث x و y حقيقيان تشكّل حقلاً.

٦٤ ـ المصفوفتان AB و BA

لتكن A و B مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل $\mathscr{F}$. إذا لم تكن كل من A و B شاذتين فعندئذ تكون AB و BA متشابهتين، وبالتالي فإنه ليس لها فقط الدّالة المميزة نفسها ولكن أيضًا الدّالة المميَّزة المختزلة نفسها. وهكذا إذا كان $|A| \neq 0$ فإن $A^{-1}(BA)A = BA$. وعلى أي حال، فإنه إذا كانت كل من A و B شاذتين، فإنه سيبقى لِـ AB و BA الدالَّة المميَّزة نفسها ولكن ليس من الضروري أن يكون لهما الدالَّة المميَّزة المختزلة نفسها.

وتُبرهن العبارة السابقة بسهولة كما يلي: وفقًا للنظرية (١٢ ـ ٢) توجد مصفوفتان P و Q، عناصرهما في $\mathscr{F}$، بحيث إن

$$A_1 = PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

حيث r هي رتبة A. وإذا وضعنا الآن

$$B_1 = Q^{-1}BP^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

حيث B_{11} مصفوفة مربّعة $r \times r$، ونستنتج من العلاقة

$$A_1B_1 = PAQQ^{-1}BP^{-1} = PABP^{-1}$$

أن لِـ A_1B_1 الدّالة المميَّزة لِـ AB نفسها. وبصورة مشابهة نستنتج أن لِـ B_1A_1 الدالّة المميَّزة لِـ BA نفسها.

ومن العلاقتين

$$A_1B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1A_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

لدينا

$$|A_1B_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} B_{11} - \lambda I_r & B_{12} \\ 0 & -\lambda I_{n-r} \end{vmatrix},$$

$$|B_1A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} B_{11} - \lambda I_r & 0 \\ B_{21} & -\lambda I_{n-r} \end{vmatrix}.$$

ووفقًا لنشر لابلاس، من السهل رؤية أن قيمة كل من المحدّدتين هي $|B_{11} - \lambda I_r|(-\lambda)^{n-r}$.

ولكي نبيِّن أنه إذا كانت كل من A و B شاذتين فليس من الضروري أن يكون للمصفوفتين AB و BA الدالّة المميّزة المختزلة نفسها، ويكفي أن نعطي توضيحًا بسيطًا. فإذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فعندئذ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، والدالتان المميَّزتان المختزلتان للمصفوفتين الأخيرتين هما λ^2 و λ ، على الترتيب.

لتكن $\phi(\lambda)$ و $\psi(\lambda)$ الدالتين المختزلتين لِـ AB و BA على الترتيب. إذا كان

$$\phi(\lambda) = \lambda^\nu + c_1\lambda^{\nu-1} + c_2\lambda^{\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1}\lambda + c_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} c_i\lambda^{\nu-i} \quad (c_0 = 1) \tag{64.1}$$

فعندئذ

$$\phi(AB) = \sum c_i (AB)^{\nu-i} = 0 \tag{64.2}$$

والآن

$$B(AB)^{\nu-i}A = B(AB)(AB)\dots(AB)A = (BA)^{\nu-i+1} \; (i = 0, \dots, \nu)$$

ومنه بضرب طرفي (64.2) على اليسار بِـ B وعلى اليمين بِـ A ، نجد

$$0 = B\phi(AB)A = \sum c_i(BA)^{\nu-i+1} = (BA)\cdot\phi(BA).$$

وبالتالي تحقِّق BA المعادلة $\lambda\,\phi(\lambda) = 0$. ووفقًا لذلك، وبالاستناد إلى النظرية (٦٢ - ١) (iii) فإن $\lambda\,\phi(\lambda)$ تقبل القسمة على $\psi(\lambda)$. وبصورة مشابهة فإن $\lambda\,\psi(\lambda)$ تقبل القسمة على $\phi(\lambda)$. ومن السهل أن نبيِّن بدءًا من هذين الشرطين حتمية تحقق إحدى العلاقات التالية:

$$\phi(\lambda) = \psi(\lambda), \quad \phi(\lambda) = \lambda\,\psi(\lambda), \quad \lambda\,\phi(\lambda) = \psi(\lambda).$$

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية التالية:

نظريـة (٦٤ - ١)

لنرمز بِـ A و B لمصفوفتين مربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل $\mathcal{F}$. إذا لم تكن كلتا المصفوفتين A و B شاذتين، يكون للمصفوفتين AB و BA ، ليس فقط الدالّة المميّزة نفسها، وإنما أيضًا الدالّة المميّزة المختزلة نفسها، وإذا كانت A و B شاذتين، يكون لِـ AB و BA الدالّة المميّزة نفسها، ولكن ليس بالضرورة الدالّة المميّزة المختزلة نفسها.

وفي جميع الأحوال، يمكن أن تختلف الدالتان المميَّزتان المختزلتان لِـ AB و BA بالعامل λ على الأكثر.

تمارين

أوجد الدالّة المميّزة والدالّة المميّزة المختزلة لكل من المصفوفات A التالية، ومن أجل كل مصفوفة غير شاذة A أوجد A^{-1} ككثيرة حدود سلّمية من درجة أصغرية في A .

١) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

٦) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

٨) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

١٠) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

١١) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

من أجل الأزواج التالية من المصفوفات A ، B ، أوجد الدالّة المميَّزة والدالّة المميَّزة المختزلة لِـ AB ولِـ BA .

١٢) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix};$

١٣) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix};$

١٤) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix},$

١٥) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$

١٦) إذا كانت A و B مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ، فبيِّن أن أثر المصفوفة $C = AB - BA$ هو الصفر.

١٧) ليكن m و n صحيحين موجبين، $m > n$ ، ولتكن أبعاد A و B هي $m \times n$ و $n \times m$ ، على الترتيب. بيِّن أن

$$|AB - \lambda I_m| = \lambda^{m-n} |BA - \lambda I_n|$$

١٨) إذا كانت A و B و C مصفوفات مربّعة $n \times n$ ، فبيِّن أن لكل من المصفوفات ABC ، BCA وCAB الدالّة المميّزة نفسها. عمِّم.

١٩) من أجل كل من الأزواج التالية من المصفوفات B وD ، حدِّد ما إذا كانت B مشابهة لِـ D أم لا، وفي حال التشابه أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث إن $BP = PD$

١ - $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix};$

٢ - $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$

٣ - $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$

الفصل الخامس عشر

الصيغ القانونيّة لمصفوفة

٦٥ ـ علاقة التكافؤ

لنعتبر مجموعة مصفوفات $A, B, C, \ldots$ عناصرها في حقل $\mathscr{F}$ ، ولنفرض وجود علاقة ثنائية ، نرمز لها بـ $\stackrel{E}{=}$ ، تتصف بالخواص الأربع التالية :

(65.1) إما $A \stackrel{E}{=} B$ أو $A \stackrel{E}{\neq} B$ ، (العلاقة حتمية Determinative) .

(65.2) $A \stackrel{E}{=} A$ ، (العلاقة انعكاسية Reflexive) .

(65.3) إذا كان $A \stackrel{E}{=} B$ فإن $B \stackrel{E}{=} A$ (العلاقة متناظرة Symmetric) .

(65.4) إذا كان $A \stackrel{E}{=} B$ و $B \stackrel{E}{=} C$ فإن $A \stackrel{E}{=} C$ (العلاقة متعدية Transitive) .

وسندعو مثل هذه العلاقة **علاقة تكافؤ**.(*)

وكأمثلة على علاقة تكافؤ يمكن ذكر ما يلي :

(ا) مساواة فعلية $A = B$ ، حيث A و B مصفوفتان $m \times n$. وهو الشكل الأكثر تقييدًا لعلاقة تكافؤ.

(ب) تكافؤ مصفوفتين $m \times n$ تحت تحويلات ابتدائية . وفي هذه الحالة $A \stackrel{E}{=} B$ إذا ، وفقط إذا ، كان لـ A و B الرتبة نفسها . وهي إحدى أقل علاقات التكافؤ تقييدًا .

(جـ) تشابه مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ، $P^{-1}AP = B$.

(د) تطابق مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ، $C'AC$ ، حيث C غير شاذة .

وسنشير غالبًا إلى الخواص (65.2) ، (65.3) و (65.4) على أنها الخواص «$R - S - T$» .

---

* تدعى غالبًا علاقة مساواة .

ولتبيان أن علاقـة التشـابـه تحقِّق الخـواص $(R - S - T)$ نلاحظ أن (١) $I^{-1}AI = A$ ، (٢) إذا كـان $P^{-1}AP = B$ فعـنـدئـذ $Q^{-1}BQ = A$ ، حيـث $Q^{-1} = P$ ، (٣) إذا كان $P^{-1}AP = B$ ، $R^{-1}BR = C$ ، فعنـدئذ $Q^{-1}AQ = C$ حيث $Q = PR$.

وتقوم علاقة تكافؤ معرّفة من أجل مجموعة من المصفوفات بفرز هذه المجموعة إلى فصـول تكـافؤ. ويتـألف الفصـل الـذي تنتمي إليه المصفـوفـة A من جميع المصفـوفـات X من هذه المجمـوعة التي تحقق $X \overset{E}{=} A$. وفي حالة المساواة الفعلية، لا يحتوي كل فصل إلا على مصفوفة واحدة.

٦٦ - الصيغ القانونيّة لمصفوفة تحت تحويلات التشابه

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. ولتكن P مصفوفة غير شاذة عنـاصرهـا في $\mathscr{F}$. فمجموعة كل المصفوفات $P^{-1}AP$ تؤلف فصلاً من المصفوفات المشابهة لِـ A . وتوجد بعض من مصفوفات هذا الفصل تكون أبسط من حيث تركيبها من المصفوفات الأخرى في الفصل نفسه مما يوضِّح وجود خواص معيَّنة لا متغيِّرة يتصف بها هذا الفصل. وتُعرف هذه المصفوفات **بالصيغ القانونيّة**. ولاثنين من هذه الصيغ القـانـونيّة أهمية خاصـة. (١) صيغـة **جورادن القـانـونيّة** أو الصيغة **الكلاسيكيّة**. و(٢) الصيغة **القانونيّة القياسيّة**. وتوضِّح الأولى القواسم الابتدائية للمصفوفة المميَّزة $A - \lambda I$ ، بينما توضِّح الأخرى العوامل اللامتغيّرة لِـ $A - \lambda I$.

٦٧ - صيغة جوردان القانونية لمصفوفة

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل الأعداد المركّبة. لتكن القواسم الابتدائية لِـ $A - \lambda I$ مكتوبة بأي ترتيب هي :

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}, (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2}, \ldots, (\lambda - \alpha_s)^{\nu_s}, (\sum \nu_i = n), \qquad (67.1)$$

حيث المقادير α هي الجذور المميَّزة لِـ A ، وليس من الضروري أن تكون كلها متميِّزة. وإذا استـطعنـا الآن كتابة مصفوفة J بحيث يكون لِـ $J - \lambda I$ القواسم الابتدائية في (67.1) ، فإن J ستكون، وفقا للنظرية (٥٩ ـ ٢)، مشابهة لِـ A .

وقبل كل شيء نكتب مصفوفة J_i مربّعة $\nu_i \times \nu_i$ بحيث يكون لـ $J_i - \lambda I$ القاسم الابتدائي الوحيد $(\lambda - \alpha_i)^{\nu_i}$. ومن الواضح أنه من أجل $\nu_i > 1$ تتصف المصفوفة المربّعة $\nu_i \times \nu_i$

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (\nu_i > 1), \qquad .(67.2)$$

التي تحوي α_i في كل مكان من القطر الرئيس، و1 في القطر الذي يعلوه مباشرة، بالخاصة المذكورة تمامًا. ذلك لأن $|J_i - \lambda I| = (\alpha_i - \lambda)^{\nu_i}$، بينما قيمة المحدَّد المصغَّر ذي الـ $\nu_i - 1$ صفًّا والناتج عن حذف الصف الأخير والعمود الأول هي الواحد. وبالتالي فإن القاسم المشترك الأعلى لجميع المحدَّدات الصغرى من $|J_i - \lambda I|$ ذات الـ $(\nu_i - 1)$ صفًّا هو الواحد، بحيث يكون لـ $J_i - \lambda I$ العامل اللامتغير الوحيد $(\lambda - \alpha_i)^{\nu_i}$ وبالتالي فله في هذه الحالة قاسم ابتدائي وحيد. وإذا كان $\nu_i = 1$ نأخذ كمصفوفة J_i المصفوفة 1×1: (α_i) التي يوجد لمصفوفتها المميِّزة $(\alpha_i - \lambda)$ القاسم الابتدائي الوحيد $\alpha_i - \lambda$.

يمكننا الآن أن نكتب مباشرة مصفوفة J مربّعة $n \times n$ قواسمها الابتدائية هي العبارات في (67.1). وفي الحقيقة فإن المصفوفة من النوع المطلوب هي المصفوفة

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix} \qquad (67.3)$$

حيث J_i هو المصفوفة المربّعة $\nu_i \times \nu_i$ المعرّفة في (67.2)، إذا كان $\nu_i > 1$، بينما J_i هي المصفوفة (α_i) المؤلفة من عنصر واحد، إذا كان $\nu_i = 1$. وبالاستناد إلى النظرية (٥٦ ـ ٣) تكون القواسم الابتدائية لـ $J - \lambda I$ هي القواسم الابتدائية

لِـ $J_i - \lambda I$ $(i = 1, 2, \dots, s)$ ، مأخوذة مع بعضها، وهي بالتالي العبارات المذكورة في (67.1).

وسنشير إلى J في (67.3) على أنه صيغة جوردان القانونية تحت تحويلات التشابه لمصفوفة A مربّعة $n \times n$ ، القواسم الابتدائية لمصفوفتها المميَّزة هي تلك المذكورة في (67.1) .

وبدلاً من استخدام الشكل J_i في (67.2) ، الذي يحوي المقادير 1 في أول قطر يعلو القطر الرئيس، يمكن استخدام J'_i ، منقول المصفوفة J_i ، وهو يحوي المقادير 1 في أول قطر تحت القطر الرئيس، والذي يمتلك أيضًا القاسم الابتدائي الوحيد $(\lambda - \alpha_i)^{\nu_i}$. ويشير بعض الكتّاب إلى J' ، منقول المصفوفة في (67.3) على أنه صيغة جوردان القانونيّة.

وبدلاً من المصفوفة J_i في (67.2) لنعتبر المصفوفة المربّعة $\nu_i \times \nu_i$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_i & c_{\nu_i - 1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_i \end{bmatrix}$$

حيث المقادير c في القطر الأول الذي يعلو القطر الرئيس (القطر العلوي الأول) هي أعداد اختيارية لا يساوي أي منها الصفر. وفي الحقيقة يمكننا الذهاب إلى أبعد من ذلك ونضع بدلاً من الأصفار فوق القطر العلوي الأول أية أعداد كانت. ومن السهل أن نتحقق عندئذ من أن للمصفوفة الناتجة القاسم الابتدائي الوحيد $(\lambda - \alpha_i)^{\nu_i}$ ، وبالتالي يمكن اختيارها كصيغة قانونيّة بدلاً من J_i . وقد اخترت هذه الأخيرة، على أي حال، لأنها أكثر بساطة.

توضيح : صيغة جوردان القانونيّة لمصفوفة $\underset{6\times 6}{A}$ بحيث تكون القواسم الابتدائية لِـ $A - \lambda I$: $(\lambda + 2)^3$ ، $\lambda + 2$ و $(\lambda - 4)^2$ هي

$$J = \left[\begin{array}{ccc:c:cc} -2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -2 & & & \\ \hdashline & & & -2 & & \\ \hdashline & & & & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 4 \end{array}\right], \qquad (67.4)$$

حيث العناصر خارج القوالب القطرية هي أصفار.

٦٨ ـ مصفوفات بقواسم ابتدائية خطِّية

في الحالة الخاصة التي تكون فيها جميع القواسم الابتدائية خطِّية. نختصر صيغة جوردان القانونيّة إلى مصفوفة تكون القوالب القطرية فيها هي عناصر 1×1 ، أي إلى مصفوفة قطرية. وهكذا إذا كان لِـ $A - \lambda I$ القواسم الابتدائية

$$\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \ldots, \lambda - \alpha_n \qquad (68.1)$$

فإن صيغة جوردان القانونيّة لِـ A هي

$$J = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \qquad (68.2)$$

وينبغي ملاحظة أن المقادير α هنا ليست مختلفة بالضرورة.

وعلى العكس، إذا كان J معطى بـ (68.2) ، وكانت A أي مصفوفة مشابهة لِـ J ، فعندئذ يكون لِـ $J - \lambda I$ ، وبالتالي لِـ $A - \lambda I$ ، القواسم الابتدائية الخطِّية في (68.1) ، وذلك وفقًا للنظرية (٥٦ ـ ٣).

وهكذا نكون قد برهنا النظرية التالية:

نظريـة (٦٨ ـ ١)

الشرط اللازم والكافي لتكون المصفوفة A المربّعة $n \times n$ مشابهة لمصفوفة قطرية هو أن تكون القواسم الابتدائية لِـ $A - \lambda I$ خطِّية.

لتكن $\phi(\lambda)$ الدالة المميَّزة المختزلة لـ A ولتكن $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$, العوامل اللامتغيرة لـ $A - \lambda I$. فبالاستناد إلى النظرية (٦٢ ـ ١) يكون $\phi(\lambda) = e_n(\lambda)$. والآن إذا كان لـ $A - \lambda I$ قواسم ابتدائية خطِّية فعندئذ يكون لـ $e_n(\lambda)$ عوامل متميّزة خطِّية وفقًا للنظرية (٥٦ ـ ١). وعلى العكس، إذا كان لـ $e_n(\lambda)$ عوامل متميِّزة خطِّية، أو باعتبار أن كل $e_i(\lambda)$ هو عامل لـ $e_n(\lambda)$ ، فسيكون لكل $e_i(\lambda)$ عوامل متميِّزة خطِّية. وبالتالي فإن القواسم الابتدائية لـ $A - \lambda I$ هي جميعها خطِّية. وهذه النتيجة بالاشتراك مع النظرية (٦٨ ـ ١) تُنتج النظرية التالية:

نظرية (٦٨ ـ ٢)

تكون مصفوفة مربّعة A مشابهة لمصفوفة قطرية إذا، وفقط إذا، كان للدالة المميّزة المختزلة لـ A عوامل خطِّية متميِّزة فقط.

ولدينا أيضًا النتيجة المباشرة:

نتيجة (٦٨ ـ ٣)

تكون مصفوفة مربّعة A جذورها المميَّزة كلها متميِّزة مشابهة دائمًا لمصفوفة قطرية.

٦٩ ـ الصيغة القانونيّة القياسيّة لمصفوفة

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في $\mathscr{F}$. وكثيرًا ما تقع الجذور المميزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ لـ A في حقل موسّع للحقل $\mathscr{F}$. وهكذا إذا كانت عناصر A أعدادًا نسبية، فإن الجذور المميَّزة، أو بعضها على الأقل، يمكن أن تكون أعدادًا غير نسبية أو ربَّما أعدادًا مركّبة. وبالتالي فقد تحوي صيغة جوردان القانونيّة أعدادًا مركّبة أو أعدادًا غير نسبية.

والصيغة القانونيّة القياسية التي سنعرِّفها الآن توضح العوامل اللامتغيرة ولا تخضع للاعتراض المذكور أعلاه.

ونبرهن أولاً التمهيدية التالية:

تمهيدية (٦٩ - ١)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathcal{F}$. ولنفرض أن $A - \lambda I$ لها عامل لا متغير واحد فقط $e_n(\lambda)$ يختلف عن الـ $1 +$. إذا كان

$$e_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n \qquad (69.1)$$

فعندئذ تكون A مشابهة للمصفوفة

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}. \qquad (69.2)$$

ونلاحظ أن الصفوف الـ $n - 1$ الأولى من R تتألف من أصفار باستثناء ما كان من عناصرها في القطر العلوي الأول فهي تساوي الواحد. بينما يحتوي الصف الأخير على معاملات $e_n(\lambda)$ ، باستثناء معامل الحد الرئيس، مكتوبة بترتيب معكوس ومسبوقة بإشارة سالبة.

ولكي نبرهن التمهيدية نحتاج فقط لتبيان أن العوامل اللامتغيرة للمصفوفة $- \lambda$:

$$R - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

هي $1, 1, \ldots, 1, e_n(\lambda)$ ، حيث $e_n(\lambda)$ معطى في (69.1). لنعرِّف كثيرات الحدود $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ كما يلي: $f_1 = -a - \lambda$ ، $f_2 = -a_2 + \lambda f_1 = -a_2 - a_1 \lambda - \lambda^2$ ، . . . ، $f_i = -a_i + \lambda f_{i-1}$ ، . . . ، $f_n = -a_n + \lambda f_{n-1}$. ومن السهل أن نتحقق عندئذ من أن $f_n(\lambda) = -e_n(\lambda)$. لنطبِّق الآن على $R - \lambda I$ التحويلات الأولية التالية: نضيف

إلى العمود $n-1$ جداء العمود n بِـ λ ، وفي المصفوفة الناتجة، نضيف إلى العمود $n-2$ جداء العمود $n-1$ بِـ λ . وتستمر الطريقة حتى نضيف أخيراً إلى العمود الأول جداء العمود الثاني بِـ λ . فنرى المصفوفة الناتجة على الشكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ f_n(\lambda) & f_{n-1}(\lambda) & \cdots & f_2(\lambda) & f_1(\lambda) \end{bmatrix}.$$

إذا طرحنا الآن من الصف الأخير الصفوف الـ $n-1$ الأولى بعد ضرب كل منها بعدد مناسب ثم وضعنا العمود الأول كآخر عمود، فإننا نختصر $R-\lambda I$ إلى الصيغة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & f_n(\lambda) \end{bmatrix}, \tag{69.3}$$

ومن الواضح أنها تمتلك العوامل اللامتغيرة $1, 1, \ldots, e_n(\lambda) = (-1)^n f_n(\lambda)$. وهو المطلوب.

لنفرض الآن أن العوامل اللامتغيّرة لِـ $A-\lambda I$ هي

$$1, 1, \ldots, 1, e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_s(\lambda). \tag{69.4}$$

حيث $e_i(\lambda)$ من الدرجة ν_i $(\sum \nu_i = n)$ و $e_{i+1}(\lambda)$ تقبل القسمة على $e_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$. نكتب الآن المصفوفة التي يتألف قطرها من قوالب:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_s \end{bmatrix}, \tag{69.5}$$

حيث R_i هي مصفوفة مربّعة $v_i \times v_i$ مثل R في (69.2) ، والصف الأخير من R_i يحوي معـامـل $e_i(\lambda)$ تمامًا كما يحوي R في (69.2) معـامـل $e_n(\lambda)$. ومن السهـل رؤية أن $R - \lambda I$ تمتلك تمامًا العوامل اللامتغيرة في (69.4). ذلك لأنه بدون التأثير في القوالب الباقية، يمكن تطبيق تحويلات ابتدائية على صفوف وأعمدة $R_i - \lambda I$ ، كما في برهان التمهيدية تمامًا، وذلك حتى يتم اختصار القالب المعنيّ إلى الصيغة (69.3). ويمكن القيام بذلـك بالنسبـة لكـل قالب من القـوالب. وعندئذ يمكن القيام بانسحابات للصفوف وللأعمدة حتى يتم اختصار $R - \lambda I$ إلى صيغة سميث الناظمية حيث تحتل العنـاصر في (69.4) مواضـع القطر الرئيس. وستُدعى R في (69.5) الصيغة القانونية القياسية للمصفوفة A التي تمتلك مصفوفتها المميَّزة العوامل اللامتغيِّرة في (69.4).

توضيـح : اكتب الصيغـة القـانـونية القياسية لمصفوفة A مربّعة 5×5 تمتلك مصفوفتها المميَّزة العوامل اللامتغيّرة 1 ، 1 ، 1 ، $\lambda^2 + \lambda + 1$ ، $\lambda^3 - 1$.

حـل: الصيغة القانونيّة القياسيّة هي

$$R = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & & \\ -1 & -1 & & & \\ \hline & & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

تعريـف

يُقال عن مصفوفة مربعة $n \times n$ دالتها المميَّزة المختزلة من درجة أصغر من n : إنها مصفـوفة متردّية. وإذا كانت الدالة المميّزة المختزلة هي الدالة المميّزة للمصفوفة نفسها. قلنا: إنها غير متردّية.

والآن يمكننا كتابة النظرية التالية:

نظريـة (٦٩ ـ ٢)

لتكن $e_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ كثـيرة حدود كيفـيّة من الدرجة n ، معامل الحد الرئيس فيها يساوي الواحد والمعاملات a_i في حقل $\mathcal{F}$. فتوجد

مصفوفات A مربّعة $n \times n$ ، غير متردّية ، عناصرها في $\mathscr{F}$. ويشكل $e_n(\lambda)$ دالتها المميَّزة المختزلة ، وفي الحقيقة تشكل R في (69.2) ، أو أي مصفوفة A مشابهة لِـ R وعناصرها في $\mathscr{F}$ ، مثل هذه المصفوفة .

٧٠ ـ المصفوفات معدومة القوى

تعريـف

لتكن N مصفـوفة مربّعة عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. إذا كان يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إن $N^m = 0$ ، فيقال: إن N معدومة القوى. وإذا كانت m أصغر عدد صحيح موجب بحيث إن $N^m = 0$ فيقال: إن N معدومة القوى دليلها m .

وعلى سبيل المثال، إذا كانت $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ فإن $N^2 = 0$. وبالتالي تكون N مصفوفة معدومة القوى دليلها 2.

لتكن N معدومة القوى دليلها m . فعندئذ تحقِّق N المعادلة السلَّمية $\lambda^m = 0$. ومنه وبالاستناد إلى النظرية (٦٢ ـ ١)، تكون الدالة المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda)$ لِـ N عاملاً من عوامل λ^m ، وبما أن $N^k \neq 0$ $(k < m)$ فيجب أن يكون $\phi(\lambda) = \lambda^m$. وهكذا فإن جميع جذور المعادلة المميَّزة المختزلة، وبالتالي واستنادًا إلى النظرية (٦٢ ـ ١)، لِـ N تكون مساويةً للصفر. وعلى العكس، لنفرض أن الجذور المميَّزة لِـ N جميعها أصفار، فالمعادلة المميَّزة لِـ N هي إذن $\lambda^n = 0$ ، ومن نظرية كايلي هاميلتون يكون $N^n = 0$.

وهكذا نكون قد برهنَّا النظرية :

نظريـة (٧٠ ـ ١)

لتكن N مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. فالشرط اللازم والكافي لتكون N معدومة القوى هو أن تكون جميع الجذور المميَّزة لِـ N مساوية للصفر. وإذا كانت N معدومة القوى دليلها m ، فإن m لا يمكن أن تتجاوز n .

ونحصل على صيغة جوردان القانونيّة لمصفوفة معدومة القوى N من المصفوفة J في (67.3) وذلـك بوضع 0 بدلاً من كل α_i . وإذا كان أكبر قالب قطري عبارة عن مصفوفة مربّعة $\nu_i \times \nu_i$ ، تكون N مصفوفة معدومة القوى دليلها ν_i .

٧١ ـ المصفوفات الدوريّة

تعريف

يقال عن مصفوفة مربّعة E عناصرها في حقل $\mathcal{F}$: إنها دوريّة إذا كان يوجد عدد صحيح موجب k بحيث إن

$$E^{k+1} = E \tag{71.1}$$

وإذا كان k أقل عدد صحيح موجب تتحقق من أجله (71.1) ، فنقول: إن k هو دور E . وبصورة خاصة، إذا كان $k = 1$ فعندئذ $E^2 = E$ وتسمى E عندئذ متساوية القوى.

وبما أن E تحقق المعادلة السلّمية $\lambda(\lambda^k - 1) = 0$ ، وليس لها أية جذور مكررة، وباعتبار أن الدالّة المميّزة المختزلة $\phi(\lambda)$ لِـ E هي، وفقًا للنظرية (٦٢ ـ ١)، عامل من عوامل $\lambda(\lambda^k - 1)$ ، فنستنتج أنه ليس لِـ $\phi(\lambda) = 0$ أي جذر مكرر. وبالتالي، وبالاستناد إلى النظرية (٦٨ ـ ٢)، تكون E مشابهة لمصفوفة قطرية، حيث يكون كل عنصر من عناصر القطر إما صفرًا وإما أحد جذور المعادلة $Z^k = 1$. وفضلاً عن ذلك، وبالاستناد إلى النظرية (٦٨ ـ ١)، فإن قواسم $E - \lambda I$ الأوّلية هي قواسم خطّية.

وعلى العكس، ليكن لِـ $E - \lambda I$ قواسم ابتدائية خطّية. إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الجذور المميّزة لِـ E فعندئذ تكون E مشابهة للمصفوفة القطرية $diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. ومنه $E^{k+1} = E$ إذا، وفقط إذا، كان $\alpha_i^{k+1} = \alpha_i$ ، أي إذا، وفقط إذا، كانت المقادير α أصفارًا أو جذورًا للواحد من المرتبة k . ومن أجل $1 \leqslant s < n$ ، إذا كان α_i الجذر الأوّلي من المرتبة ν_i للواحد $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ، بينما $\alpha_i = 0$ $(i = s+1, \ldots, n)$ ، وإذا كان k المضاعف المشترك البسيط لِـ $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ ، فإن (71.1) هي المعادلة السلّمية ذات الدرجة الأدنى التي تحققها E .

ومنه نجد النظرية:

نظرية (٧١ ـ ١)

تكون المصفوفة E دوريّة، أي أن E تحقّق معادلة من الشكل $E^{k+1} = E$ ، إذا، وفقط إذا كانت القواسم الأوّلية لِـ $E - \lambda I$ قواسم خطّية، وكانت الجذور المميّزة

لـِ E إما أصفارًا أو جذورًا للواحد من المرتبة k .

وكتوضيح للمصفوفات الدوريّة، لنعتبر المصفوفات $E_{3\times 3}$ غير الشاذة بحيث إن $E^3 = E$. وبما أن E غير شاذة فهي تحقق المعادلة $\lambda^2 - 1 = 0$. وبالتالي فإن الدالة المميَّزة المختزلة لِـ E هي من عوامل $\lambda^2 - 1$. إذا فرضنا أن $E \neq \pm I$ ، فإن الدالة المميَّزة المختزلة هي $\lambda^2 - 1$ ، أي أن الجذور المميَّزة هي $+1$ ، -1 . ومنه يكون E مشابهًا لإحدى المصفوفتين القطريتين

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (71.2)$$

وفي الهندسة الإسقاطية يدعى تحويل خطّي متجانس مصفوفته هي إحدى المصفوفتين في (71.2) **الشباه التوافقي**.

٧٢ ـ تصنيف التسامت

ليكن $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ متّجهي عمود بُعد كل منهما n ، ولتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ ، فوق حقل $\mathscr{F}$. وكما في الفقرة ٢٤ ، سندعو علاقة المصفوفات

$$Y = AX \qquad (72.1)$$

التي نحوِّل بوساطتها المتّجه X إلى المتّجه Y ، تحويلاً خطّيًا متجانسًا. وتحت التحويل (72.1) إذا حوَّلنا المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_s$ إلى المتّجهات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_s$ ، على الترتيب. فعندئذ يتحول، وفقًا لِـ (72.1) ، المتّجه النموذجي $k_1X_1 + \ldots + k_sX_s$ للفضاء المتّجهي الخطّي المتولد عن المتجهات $X_1, \ldots, X_s$ إلى المتّجه $k_1Y_1 + \ldots + k_sY_s$ للفضاء المتّجهي الخطّي المتولّد عن المتّجهات $Y_1, \ldots, Y_s$.

من أجل $n = 4$ يمثِّل المتّجه X ، في الهندسة الإسقاطية، الإحداثيات الإسقاطية المتجانسة لنقطة في الفضاء، وليس المهم القيم x نفسها ولكن نسبها. وفي هذه الحالة وتحت التحويل (72.1) تتحول النقاط المستوية (في مستوى واحد) إلى نقاط مستوية،

وبالتالي تتحول الخطوط، تقاطع المستويات، إلى خطوط. وهكذا يدعى تحويل من النوع (72.1) في الهندسة الإسقاطية تسامتًا. وبصورة مشابهة إذا كان $n = 3$ فإن (72.1) تمثّل تسامتًا في مستوى. ويدعى التسامت شاذًا أو غير شاذ حسبما تكون A شاذة أو غير شاذة.

رأينا في الفقرة **٢٥** أنه، إذا كانت C مصفوفة غير شاذة فإن التسامت

$$Y = (C^{-1}AC)\,X$$

يمثّل التسامت $Y = AX$ نفسه، غير أنه منسوب إلى محاور إسناد أخرى وللمصفوفتين المميِّزتين لِـ A و $C^{-1}AC$ القواسم الابتدائية نفسها، كما أن صيغتي جوردان القانونيتين للمصفوفتين متطابقتان.

لنفرض، على أي حال، أن A و B مصفوفتان مربعتان $n \times n$ لا تمتلك مصفوفتاهما المميِّزتان القواسم الابتدائية نفسها، ولكن لهما مميِّز سيجر (Segre) نفسه. أي أنه يوافق كل قاسم ابتدائي $(\lambda - \alpha_i)^{\nu_{ij}}$ لِـ $A - \lambda I$ قاسم ابتدائي $(\lambda - \beta_i)^{\nu_{ij}}$ لِـ $B - \lambda I$ له القوة ν_{ij} نفسها. هنا نتفق على أن $\beta_i = 0$ إذا وفقط إذا كان $\alpha_i = 0$. وصيغتا جوردان القانونيتان لِـ A و B تتطابقان عندئذ من حيث البنية وتختلفان فقط في الجذور التي تظهر في القطر. ونعتبر عندئذ التسامت $Y = AX$ و $Y = BX$ من النوع نفسه. ونمضي الآن إلى تصنيف تسامت المستوي وفقًا للنوع:

لتكن A مصفوفة مربّعة 3×3 عناصرها في حقل مركّب ولتكن $e_1(\lambda)$ ، $e_2(\lambda)$ و $e_3(\lambda)$ العوامل اللامتغيّرة لِـ $A - \lambda I$. فيوجد وفقًا للنظرية (**٥٦ ـ ٢**) كثيرتا حدود ابتدائيتان معاملاتهما. مصفوفات $P(\lambda)$ و $Q(\lambda)$. بحيث إن

$$P(\lambda)\,(A - \lambda I)\,Q(\lambda) = diag\,[e_1(\lambda), e_2(\lambda), e_3(\lambda)]$$

حيث المصفوفة القطرية في الطرف الأيمن هي صيغة سميث الناظمية. وإذا أخذنا محدّد كل من الطرفين وتذكرنا أن $|P|$ و $|Q|$ عددان ثابتان يختلفان عن الصفر، فلدينا

$$e_1(\lambda)\,e_2(\lambda)e_3(\lambda) = \pm f(\lambda),$$

حيث $f(\lambda)$ هي الدالّة المميِّزة لِـ A .

لنفرض الآن $f(\lambda) = 0$ لها ثلاثة جذور متميِّزة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ، جميعها مختلفة عن الصفر فعندئذ، ووفقًا للنظرية (**٦٢ ـ ١**)، تكون $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ جذورًا لِـ $e_3(\lambda) = 0$ بحيث

إن $e_3(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$ ، بينما $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1$.
للمصفوفة $A - \lambda I$ قواسم ابتدائية خطّية مشابهة للمصفوفة القطرية

النـوع I $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$ ، ومميَّز سيجر هو [(1) (1) (1)].

لنفــرض، على أي حال، أن A و B مصفــوفتــان مربّعتــان $n \times n$ لا تمتلك مصفـوفتـاهمـا المميَّزتـان القـواسم الابتـدائية نفسها، ولكن لهما مميَّز سيجر (Segre) نفســه. أي أنـــه يوافق كل قاسم ابتـــدائي $(\lambda - \alpha_i)^{v_{ij}}$ لِـ $A - \lambda I$ قاسم ابتـدائي $(\lambda - \beta_i)^{v_{ij}}$ لِـ $B - \lambda I$ له القوة v_{ij} نفسها. هنا نتفق على أن $\beta_i = 0$ إذا وفقط إذا كان

$$e_1(\lambda) = 1 \text{ ،} \quad e_2(\lambda) = \lambda - \alpha_1 \text{ ،} \quad e_3(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \text{ ،}$$

و

$$e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1 \text{ ،} \quad e_3(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^2(\lambda - \alpha_2).$$

وفي الحالة الأولى تكون صيغة جوردان القانونيّة. ومميَّز سيجر هما:

النـوع II $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ ، [(11) (1)].

وفي الحالة الثانية تكون القواسم الابتدائية $(\lambda - \lambda I_1)^2$ و $\lambda - \alpha_1$ بحيث نجد

النـوع III $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ ، [(2) (1)].

وأخيراً، لتكن $f(\lambda)$ بحيث تحوي عاملاً ثلاثيًّا $(\lambda - \alpha)^3$. فمن السهل رؤية أنه توجد ثلاث حالات ممكنة:

$$e_3(\lambda) = e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = \lambda - \alpha,$$
$$e_3(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2, \quad e_2(\lambda) = \lambda - \alpha, \quad e_1(\lambda) = 1,$$
$$e_3(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3, \quad e_2(\lambda) = e_1(\lambda) = 1.$$

في الحالة الأولى، نجد أن القواسم الابتدائية $\lambda - \alpha$ ، $\lambda - \alpha$ و $\lambda - \alpha$ ، ونحصل في مقابل ذلك على

$$\text{النوع IV} \quad \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad [(1\ \ 1\ \ 1)].$$

وفي الحالة الثانية تكون القواسم الابتدائية $(\lambda - \alpha)^2$ و $\lambda - \alpha$ ، وفي مقابل ذلك نجد

$$\text{النوع V} \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad [(2\ \ 1)].$$

وفي الحالة الأخيرة يوجد قاسم ابتدائي وحيد $(\lambda - \alpha)^3$ ، ويوافقه:

$$\text{النوع VI} \quad \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad [(3)].$$

وقد فرضنا حتى الآن أن A غير شاذة، بحيث لا تكون أي من القيم α مساوية للصفر. وللحصول على الحالة التي تكون فيها A شاذة، نسمح لإحدى القيم α بأن تساوي الصفر. وعند وضع $\alpha = 0$ ، تنبثق مصفوفات وحيدة عن الأنواع IV ، V و VI. ولا يوجد بالنسبة للنوع الأول أي فرق جوهري بين أن نضع $\alpha_1 = 0$ ، $\alpha_2 = 0$ أو $\alpha_3 = 0$. وعلى أي حال، ففي النوعين II و III نحصل على نوع مختلف جوهريًا عند وضع $\alpha_1 = 0$ عما نحصل عليه عند وضع $\alpha_2 = 0$. ولذلك فإنه ينبثق عن كل من هذين النوعين الأخيرين نوعان شاذان مختلفان بصورة جوهرية. والصيغ القانونية ومميِّز سيجر في الحالات المتتالية هي:

$$\text{I}'. \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [(1)(1)(\overset{0}{1})]; \qquad \text{II}'_1. \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad [(\overset{0}{1}\ \overset{0}{1})(1)];$$

$$\text{II}'_2.\quad \begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [(1\ 1)(\overset{\circ}{1})];\qquad \text{III}'_1.\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2\end{bmatrix},\quad [(\overset{\circ}{2})(1)];$$

$$\text{III}'_2.\quad \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 & 0\\ 0 & \alpha_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [(2)(\overset{\circ}{1})];\qquad \text{IV.}\quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [(\overset{\circ}{1}\ \overset{\circ}{1}\ \overset{\circ}{1})];$$

$$\text{V.}\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [(\overset{\circ}{2}\ \overset{\circ}{1})];\qquad \text{VI.}\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad [(\overset{\circ}{3})].$$

تمارين

من أجـل كل من المصفوفات التالية A ، أوجد العوامل اللامتغيرة والقواسم الابتدائية للمصفوفة المميّزة $A - \lambda I$ واكتب الصيغة القانونيّة القياسيّة وصيغة جوردان القانونية لـ A :

١) $\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ 6 & -3 & -1\\ 6 & -4 & 0\end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\\ 3 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix}8 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -1\\ -4 & -1 & 1\end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ٦) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ -6 & -6 & -5\end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ ٨) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

١٠) $\begin{bmatrix} 13 & 24 & -35 \\ -8 & -15 & 25 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

١١) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

١٢) $\begin{bmatrix} -5 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

١٣) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

١٤) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

١٥) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

١٦) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ فبيِّن أنه لا توجد أية مصفوفة X بحيث إن $X^2 = A$.
[**إرشاد**: إذا كان $X^2 = A$ ، فإن X معدومة القوى، ولكن $X^2 \neq 0$].

١٧) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فبيِّن أنه لا توجد أية مصفوفة X بحيث إن $X^2 = A$.

١٨) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فأوجد أعم مصفوفة $\underset{3\times 3}{X}$ بحيث إن $X^2 = A$.

١٩) بيِّن أنه إذا كانت N مصفوفة معدومة القوى فإن صيغة جوردان القانونية (67.3)

والصيغة القانونية القياسية في (69.5) متطابقتان .

٢٠) إذا كانت A مصفوفة 4×4 ، فصنِّف جميع التسامتات غير الشاذة $Y = AX$ وفقًا لمميِّز سيجر للمصفوفة $A - \lambda I$ ، واكتب صيغة جوردان القانونية من أجل كل منها . صنِّف أيضًا جميع التسامتات الشاذة .

٢١) إذا كانت E مصفوفة 4×4 لا تساوي $\pm I$ وبحيث إن $E^2 = I$ ، فبيِّن أن E مشابهة لإحدى المصفوفات الثلاث

$$\pm \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

٢٢) أوجد الشروط اللازمة والكافية بالنسبة للمقادير a بحيث تكون المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مشابهة لمصفوفة قطرية .

٢٣) بيِّن أن كل مصفوفة مربّعة A مشابهة لمدوَّرها (منقولها) .

٢٤) إذا كانت J_i هي المصفوفة المربّعة $v_i \times v_i$ في (67.2) ، فأوجد مصفوفة مربعة $v_i \times v_i$ غير شاذة S بحيث إن $S^{-1}J_iS = J_i'$.

٢٥) لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ جذورها المميِّزة المتميِّز بعضها عن بعضها الآخر هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. فبيِّن أن الشرط اللازم والكافي لتكون A مشابهة لمصفوفة قطرية هو أن يكون للمصفوفة $(A - \alpha_i I)^2$ رتبة $A - \alpha_i I$ نفسها من أجل كل جذر متميِّز α_i .

٢٦) إذا كانت J المصفوفة 6×6 في (67.4) فأوجد S بحيث إن $S^{-1}JS = J'$.

الفصل السادس عشر

كثيرات الحدود السُلَّمية في مصفوفة

٧٣ ـ مقدمة

لنرمز بـ A و B للمصفوفتين المربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل $\mathscr{F}$. إذا كان $S^{-1}AS = B$ فعندئذ $S^{-1}A^2S = (S^{-1}AS)^2$ ، $S^{-1}A^2S = B^2$ ، وبصورة عامة إذا كان m أي عدد صحيح موجب و c أي عنصر من $\mathscr{F}$ ، فإن $S^{-1}(cA^m)S = cB^m$. وإذا عرَّفنا A^0 بأنه I ، فإن العلاقة الأخيرة تصحّ أيضًا من أجل $m = 0$. والآن إذا كان

$$g(\lambda) = c_0\lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + \dots + c_{m-1}\lambda + c_m \tag{73.1}$$

أي كثيرة حدود سلَّمية معاملاتها في $\mathscr{F}$ ، فنستنتج مباشرة أن

$$S^{-1}g(A)S = g(B)$$

ويمكننا إذن دراسة كثيرة الحدود السلَّمية $g(A)$ عن طريق دراسة كثيرة الحدود $g(B)$ حيث B أي مصفوفة مشابهة لِـ A . وسنجد من المفيد أن نأخذ B كصيغة جوردان القانونية لِـ A .

٧٤ ـ مصفوفة بقاسم ابتدائي واحد

ليكن لِـ $A - \lambda I$ قاسم ابتدائي وحيد $(\lambda - \alpha)^n$. فصيغة جوردان القانونيّة لِـ A هي بالتالي مصفوفة مربّعة $n \times n$ من الشكل (67.2) بعد وضع α بدلاً من α_i ، أي أنه يمكن أن نأخذ

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}. \tag{74.1}$$

لنكتب $A - \alpha I = N$ ، أي $A = \alpha I + N$. بما أن الدالَّة المميَّزة المختزلة لِـ A هي $(\lambda - \alpha)^n$ ، فمن الواضح أن N معدومة القوى ودليلها n . وفضلاً عن ذلك، وباعتبار أن N تقبل التبادل مع عناصر الحقل $\mathscr{F}$ ، كما تقبل التبادل مع نفسها مرفوعة إلى أي قوة، تمامًا كأي عدد سلَّمي، فلدينا

$$A^2 = \alpha^2 I + 2\alpha N + N^2,$$
$$A^3 = \alpha^3 I + 3\alpha^2 N + 3\alpha N^2 + N^3,$$

وبصورة عامة، ووفقًا لمفكوك تايلور نجد:

$$g(A) = g(\alpha)I + g'(\alpha)N + \frac{g''(\alpha)}{2!}N^2 + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}N^{n-1}, \qquad (74.2)$$

حيث المتسلسلة منتهية مادام $N^n = 0$.

ونحصل الآن على N بوضع $\alpha = 0$ في A المعرفة في (74.1). وبالتالي فإن N تحوي المقادير 1 في القطر الأول فوق القطر الرئيس وأصفارًا فيما عدا ذلك. ومن السهل أن نرى الآن أن N^2 تحوي المقادير 1 في القطر الثاني فوق القطر الرئيس وأصفارًا فيما عدا ذلك، وبصورة عامة تحوي N^j المقادير 1 في القطر j فوق القطر الرئيس وأصفارًا فيما عدا ذلك. والآن إذا كانت A هي المصفوفة في (74.1) فإن $g(A)$ هي المصفوفة

$$g(A) = \begin{bmatrix} g(\alpha) & g'(\alpha) & \frac{1}{2}g''(\alpha) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(\alpha) \\ 0 & g(\alpha) & g'(\alpha) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}g^{(n-2)}(\alpha) \\ 0 & 0 & g(\alpha) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}g^{(n-3)}(\alpha) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g'(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g(\alpha) \end{bmatrix} \qquad (74.3)$$

حيث $g(\alpha)$ في كل مكان من القطر الرئيس، $g'(\alpha)$ في كل مكان من القطر العلوي الأول و $\frac{1}{j!}g^{(j)}(\alpha)$ في كل مكان من القطر العلوي j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

ونتذكر من المثال ٩، فقرة ٢٩، أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ رتبتها r ، فإننا نعرِّف الفرق $n - r = \tau$ بأنه صفرية (nullity) المصفوفة A . ويمكننا الآن برهان النظرية:

نظريـة (٧٤ ـ ١)

لتكن A مصفوفـة مربّعـة $n \times n$ لها قاسم ابتدائي وحيد $(\lambda - \alpha)^n$ ، ولتكن $g(\lambda)$ كثيرة حدود سلّمية . فمن أجل $0 \leqslant \tau < n$ ، يكون للمصفوفة $g(A)$ في (74.3) صفرية τ إذا ، وفقط إذا ، كان α جذرًا مكررًا τ مرة للمعادلة $g(\lambda) = 0$ ، بينما يكون لِـ $g(A)$ صفـرية $\tau = n$ إذا ، وفقط إذا ، كان للمعادلة $g(\lambda) = 0$ جذر α مكرر على الأقل n مرة .

من الواضح أن النظرية صحيحة من أجل $\tau = 0$. ذلك لأن رتبة $g(A)$ هي $n - \tau = n$ إذا ، وفقط إذا ، كان $g(\alpha) \neq 0$.

لنفـرض عنـدئـذ أن $0 < \tau < n$ وليكن α جذرًا مكـررًا τ مرة للمعـادلـة $g(\lambda) = 0$. فعندئذ $g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(\tau-1)}(\alpha) = 0$ ، بينما $g^{(\tau)}(\alpha) \neq 0$. ويتضح عندئذ من النظر إلى المصفوفة في (74.3) أن مربع المصفوفة من المرتبة $n - \tau$ الواقعة في الزاوية اليمنى العليا تحوي $g^{(\tau)}(\alpha)$ في كل مكان من القطر الرئيس وأصفارًا تحت القطر الرئيس . ومحدَّد هذه المصفوفة هو إذن مختلف عن الصفر بينما يساوي كل محدّد من هذا القبيل ومن مرتبة أعلى الصفر . أي أن رتبة $g(A)$ هي $n - \tau$ وله صفرية تساوي τ . وعلى العكس ، يمكن أن يكون لِـ $g(A)$ صفرية τ وبالتالي رتبته $n - \tau$ فقط إذا كان المحـدّد من مرتبة $n - \tau$ الواقع في الزاوية العليا اليمنى مختلفًا عن الصفر بينما جميع المحـدّدات من هذا القبيل ومن مرتبـة أعـلى تسـاوي الصفـر ، وبـالتـالي فإن $g(\alpha) = g'(\alpha) = \ldots = g^{(r-1)}(\alpha) = 0$ ، بينـما $g^{r}(\alpha) \neq 0$ ، وهـذا يعـني أن α هو جذر لِـ $g(\lambda) = 0$ مكرر τ مرة .

ولبرهان العبارة الأخيرة من النظرية ، نلاحظ أن لِـ $g(A)$ صفرية $\tau = n$ ، وبالتالي فإن رتبتها صفر إذا ، وفقط إذا ، كان $g(A) = 0$ ، وهذا صحيح إذا ، وفقط إذا ، كان $g(\lambda)$ قابلاً للقسمة على $(\lambda - \alpha)^n$ ، وهو الصيغة القانونيّة القياسيّة لِـ A .

وهكذا يكون قد تمَّ البرهان على النظرية (٧٤ ـ ١) .

ونحذِّر الطالب من أن النظرية (٧٤ ـ ١) غير صحيحة إذا كانت A متردِّية . وعلى سبيل المثال ، إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

و $g(\lambda) = \lambda^2 - 1$ ، فلدينا

$$g(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

وبالتالي $\tau = 2$ ، ولكن 1 ليس جذرًا مضاعفًا لِـ $g(\lambda) = 0$.

٧٥ ـ كثيرات الحدود السلَّمية في مصفوفة عامة A

لنفرض الآن أن للمصفوفة المميّزة لِـ A القواسم الابتدائية

$$(\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}, (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2}, \ldots, (\lambda - \alpha_s)^{\nu_s} \quad (\Sigma \nu_i = n),$$

حيث المقادير α ليست متميزة بالضرورة. وعندئذ وفقًا للفقرة ٦٧، تكون المصفوفة A مأخوذة في صيغة جوردان المختزلة هي المصفوفة التي تحوي قوالب على طول القطر الرئيس.

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix}, \qquad (75.1)$$

حيث J_i هي مصفوفة مربّعة $\nu_i \times \nu_i$ من الشكل (74.1) من أجل $\nu_i > 1$ وبينما J_i هي (α_i) ، أي عنصر قطري 1×1 من أجل $\nu_i = 1$.

وكمسألة رموز سندعو المصفوفة من الشكل (75.1) ، التي تتألف من قوالب قطرية منفصلة تمامًا عن بعضها $J_1, J_2, \ldots, J_s$ ، المجموع المباشر للمقادير J وسنكتب

$$A = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_s.$$

والآن إذا كان $B = K_1 \dotplus K_2 \dotplus \ldots \dotplus K_s$ هو المجموع المباشر للمصفوفات

$K_1, K_2, \ldots, K_s$ حيث تكون كل K_i مصفوفة مربّعة لها أبعاد J_i نفسها، أي أنه إذا كانت B مصفوفة من الشكل A في (75.1) ، حيث نضع المقادير K بدلًا من المقادير J ، فنستنتج من الفقرة ٥ أن:

$$A + B = (J_1 + K_1) \dot{+} (J_2 + K_2) \dot{+} \ldots \dot{+} (J_s + K_s),$$

و

$$AB = J_1K_1 \dot{+} J_2K_2 \dot{+} \ldots \dot{+} J_sK_s.$$

ونستنتج الآن مباشرة أنه إذا كان $g(\lambda)$ كثيرة حدود سلَّمية في (73.1) ، فإن:

$$g(A) = g(J_1) \dot{+} g(J_2) \dot{+} \ldots \dot{+} g(J_s), \tag{75.2}$$

حيث $g(J_i)$ مصفوفة مربّعة $v_i \times v_i$ من النوع المذكور في (74.3) بعد وضع α_i بدلًا من α .

والآن عناصر القطر الرئيس من $g(A)$ في (75.2) هي $g(\alpha_1)$ مكرر v_1 مرة، $g(\alpha_2)$ مكـرّر v_2 مرة، و $g(\alpha_s)$ مكرر v_s مرة. وبما أن عناصر القطر في المصفوفة التي تحوي أصفارًا فقط تحت القطر هي الجذور المميّزة، فلدينا النظرية:

نظريـة (٧٥ ـ ١)

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الجذور المميَّزة لمصفوفة A وإذا كانت $g(\lambda)$ أية كثيرة حدود سلَّمية، فإن الجذور المميَّزة لِـ $g(A)$ هي $g(\alpha_1)$ ، $g(\alpha_2)$ ، . . . ، $g(\alpha_n)$.

نتيجـة (٧٥ ـ ٢)

إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ الجذور المميَّزة لمصفوفة A وكانت $g(\lambda)$ أية كثيرة حدود سلَّمية، فعندئذ:

$$|g(A)| = g(\alpha_1) \,.\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n). \tag{75.3}$$

٧٦ ـ المصفوفتان متساوية القوى ومعدومة القوى الرئيستان الموافقتان لمصفوفة معيَّنة

لتكن A أي مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل أعداد ما، وليكن $\mathcal{F}$ أصغر حقل تقبل فيه $\phi(\lambda)$ ، الدالّة المميَّزة المختزلة لِـ A ، التحليل تمامًا إلى عوامل خطِّية.

ولنفرض عندئذ أن :

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}(\lambda - \alpha_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{\nu_s} \ (s \geq 2;\ \sum \nu_i = \nu \leq n), \qquad (76.1)$$

حيث المقادير α هي أعداد متميّزة من الحقل $\mathcal{F}$. لنعرِّف كثيرات الحدود $\psi_j(\lambda)$ كما يلي :

$$\psi_i(\lambda) \equiv \frac{\phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha_i)^{\nu_i}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, s). \qquad (76.2)$$

فمن الواضح عندئذ أن $\psi_j(\lambda)$ و $(\lambda - \alpha_j)^{\nu_j}$ أوليان بالنسبة لبعضهما، أي أنه ليس لهما عامل مشترك غير عدد لا يساوي الصفر. ومنه نستطيع إيجاد كثيرتي حدود $g_j(\lambda)$ و $h_j(\lambda)$ من درجتين لا تتجاوزان $\nu_j - 1$ و $\nu - \nu_j - 1$ ، على الترتيب، وبحيث إن

$$g_i(\lambda)\psi_i(\lambda) + h_i(\lambda)(\lambda - \alpha_i)^{\nu_i} \equiv 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, s). \qquad (76.3)$$

إذا عرّفنا

$$E_i(\lambda) = g_i(\lambda)\psi_i(\lambda) \qquad (76.4)$$

وكتبنا E_j فقط للدلالة على $E_j(A)$ ، فعندئذ E_j هو المصفوفة متساوية القوى الرئيسة الخاصة بـ A ، والتي توافق الجذر α_j. ولهذه المصفوفات $E_1, \ldots, E_s$ العديد من الخواص المهمة والمفيدة التي سنتقصّاها الآن.

وقبل كل شيء، يتضح لنا من (76.3) أن $E_j(\lambda) \equiv g_j(\lambda)\psi_j(\lambda)$ لا تقبل القسمة على $(\lambda - \alpha_j)^{\nu_j}$ ، ذلك لأنه إذا كان الأمر كذلك فإن الطرف الأيسر من (76.3) سيقبل القسمة على $(\lambda - \alpha_j)^{\nu_j}$ ، بينما لا يحقّق الطرف الأيمن ذلك. ومنه $E_j \neq 0$.

والآن من أجل $j \neq k$ ، يكون $E_j(\lambda) E_k(\lambda) \equiv g_j(\lambda) g_k(\lambda) \psi_j(\lambda) \psi_k(\lambda)$ قابلاً للقسمة على $\phi(\lambda)$ ، ذلك لأن $\psi_j(\lambda)$ قابل للقسمة على جميع عوامل $\phi(\lambda)$ باستثناء $(\lambda - \alpha_j)^{\nu_j}$ ، بينما يقبل $\psi_k(\lambda)$ القسمة على هذا الأخير. ومنه :

$$E_j E_k = 0 \quad (j \neq k) \qquad (76.5)$$

ولدينا من (76.3):

$$\prod_{j=1}^{s} (1 - E_j(\lambda)) = \prod_{j=1}^{s} h_j(\lambda)(\lambda - \alpha_j)^{\nu_j} = \phi(\lambda) \prod_{j=1}^{s} h_j(\lambda),$$

وبالتالي

$$\prod_{j=1}^{s} (I - E_j) = 0.$$

وإذا نشرنـا الطرف الأيسر من هذه المعادلة الأخيرة واستفدنا من (76.5) نجد العلاقة المهمة:

$$\sum_{j=1}^{s} E_j \equiv E_1 + E_2 + \dots + E_s = I. \qquad (76.6)$$

وبضرب طرفي هذه المعادلة الأخيرة في E_k نجد:

$$E_k^2 = E_k \quad (k = 1, 2, \dots, s) \qquad (76.7)$$

وهذا يعني أن كل E_k متساوية القوى، ويدعى E_k المصفوفة متساوية القوى الرئيسة الخاصة بـ A ، والموافقة للجذر α_k.

لنعرف الآن كثيرات الحدود السلّمية

$$N_j(\lambda) = (\lambda - \alpha_j)\, E_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, s) \qquad (76.8)$$

ولنكتب N_j فقط من أجـل $N_j(A)$. فسنجـد عنـدئـذ في الحال، وباعتبار أن جميع المصفوفات المعنيَّة هي كثيرات حدود في A وهي بالتالي تتصف بخاصة التبادلية

$$E_jN_j = N_j = N_jE_j, \quad E_jN_k = N_jN_k = 0 \quad (j \neq k) \qquad (76.9)$$

وفضلاً عن ذلك، وباعتبار أن $E_j(\lambda)$ تحوي جميع عوامل $\phi(\lambda)$ من النوع $(\lambda - \alpha_k)^{\nu_k}$ باستثناء $\lambda - \alpha_j$ وأنّها أوّلية بالنسبة لهذه الأخيرة، فمن الواضح أن $[N_j(\lambda)]^m$ قابل للقسمة على $\phi(\lambda)$ إذا، وفقط إذا كان $m \geq \nu_j$. ومنه

$$N_j^{\nu_j} = 0, \quad N_j^m \neq 0, \quad m < \nu_j \qquad (76.10)$$

وهذا يعني أن N_j معدومة القوى ودليلها ν_j . وتدعى N_j بالمصفوفة معدومة القوى الرئيسة الخاصة بـ A ، والموافقة للجذر α_j . وبصورة خاصة ينبغي ملاحظة أنه إذا كان α_j جذرًا بسيطًا لـ $\phi(\lambda) = 0$ ، أي إذا كان $\nu_j = 1$ في (76.1) ، فإن N_j الموافقة هي الصفر. وأخيرًا لدينا من (76.8)

$$AE_j = \alpha_j E_j + N_j,$$

وبالتالي فإنه لدى الجمع فوق j نجد:

$$A = \sum_{j=1}^{s} (\alpha_j E_j + N_j). \qquad (76.11)$$

ونبرهن الآن النظرية المهمة التالية:

نظريـة (٧٦ ـ ١)

المصفـوفات $E_1, N_1, \ldots, N_1^{\nu_1 - 1}, E_2, N_2, \ldots, N_2^{\nu_2 - 1}, \ldots, E_s, N_s, \ldots, N_s^{\nu_s - 1}$ (حيث يفهم أنه في حالة $\nu_i = 1$ تكون المصفوفات $N_j, N_j^2, \ldots$ غير موجودة) مستقلة خطيًّا.

$$\sum c_i E_i + \sum c_i' N_i + \cdots + \sum c_i^{(\nu_i - 1)} N_i^{\nu_i - 1} = 0.$$

وبضرب الطرفين في E_k نجد:

$$c_k E_k + c_k' N_k + \cdots + c_k^{(\nu_k - 1)} N_k^{\nu_k - 1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, s).$$

إذا كان $c_k \neq 0$ فلا بد أن تكون $E_k = 0$ أو معدومة القوى، ولكن الحال ليست هذا أو ذاك، وبالتالي يكون $c_k = 0$. ولكن $c_k' = c_k'' = \ldots = c_k^{\nu_k - 1} = 0$ عندئذ، باعتبار أن N_k معـدومـة القوى دليلها ν_k ، والمعادلة السلّمية بأقل درجة ممكنة التي تحقّقها N_k هي $\lambda^{\nu_k} = 0$.

توضيـح: إذا كان
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

فنجـد بسهولة أن الدالة المميّزة المختزلة هي $\phi(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$. لتكن $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_{12} = +3$ ، فطالما أن لـ $\phi(\lambda) = 0$ جذرين متميِّزين فقط، نجد:

$$\psi_1(\lambda) = \lambda - 3 = (\lambda - \alpha_2)^{\nu_2}, \quad \psi_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = (\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}$$

وهكذا تلتئم المعادلتان $(s = 2)$ في (76.3) في معادلة واحدة:

$$g_1(\lambda)(\lambda - 3) + g_2(\lambda)(\lambda - 1)^2 \equiv 1.$$

وبطريقة المعاملات غير المحدَّدة نجد أن $g_1(\lambda) = -\frac{1}{4}(\lambda + 1)$ و $g_2(\lambda) = \frac{1}{4}$ ، أي أن

$$E_1 = -\tfrac{1}{4}(A^2 - 2A - 3I), \qquad E_2 = \tfrac{1}{4}(A - I)^2,$$

وبالتالي فإن

$$N_1 = -\tfrac{1}{4}(A - I)(A^2 - 2A - 3I), \quad N_2 = \tfrac{1}{4}(A - 3I)(A - I)^2 = 0.$$

وبالحسابات الفعلية نجد

$$E_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \qquad E_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix};$$

$$N_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -10 \\ 10 & 10 & -10 \end{bmatrix}; \qquad N_2 = 0.$$

ويمكن أن نبيِّن بسهولة أن هذه المصفوفات الأربع تحقِّق الشروط (76.11) ,..., (76.5).

فرضنا حتى الآن في هذه الفقرة أن لِـ A على الأقل جذرين مميَّزين مختلفين. وفي الحالة التي يكون فيها لِـ A جذر مميّز وحيد α ، بحيث تكون الدالة المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{\nu}\ (\nu \leqslant n)$ ، نأخذ

$$N_1 = A - \alpha I \quad \text{و} \quad E_1 = I$$

ونرى مباشرة أن شروطًا كَـ (76.11) ,..., (76.5) ، وهي قابلة للتطبيق، تصحّ أيضًا في هذه الحالة.

ويمكننا الآن إقامة البرهان على النظرية التالية:

نظريـة (٧٦ ـ ٢)

إذا كانت E_i ، N_i $(i = 1, 2, ..., s)$ هي المصفـوفـات الرئيسة متساوية القوى والمصفـوفـات الرئيسة معدومة القوى الخاصة بمصفوفة A مربّعة $n \times n$ ، وإذا كان $P^{-1}AP = \breve{A}$ ، فعندئذ $\breve{E}_i = P^{-1}E_iP$ و $\breve{N}_i = P^{-1}N_iP$ هما المصفوفتان الرئيستان متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقتان لِـ $\breve{A}$.

ولـبرهان هذا علينا فقط ملاحظة أن المصفوفات $\breve{A}$ ، $\breve{E}_i$ ، و $\breve{N}_i$ تحقِّق جميعها شروط الفقرة ٧٦ التي تحقِّقها المصفوفات A ، E_i و N_i .

٧٧ ـ شروط تحديد المصفوفات الرئيسة متساوية القوى

نبرهن الآن النظرية التالية:

نظريـة (٧٧ ـ ١)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ جذورها المميّزة المختلفة هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. فتُحدَّد المصفوفات الرئيسة متساوية القوى G_j الخاصة بـ A ، بصورة وحيدة، من خلال الشروط التالية :

$$AG_j = G_jA \qquad (77.1)$$

$(A - \alpha_j I)\, G_j$ هي مصفوفة معدومة القوى $\qquad (77.2)$

$$\sum G_j = I \qquad (77.3)$$

$$G_j^2 = G_j \qquad (77.4)$$

أي أنه إذا كانت E_j المصفوفات متساوية القوى المعرّفة في الفقرة السابقة، فعندئذ

$$G_j = E_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

إذا كان $s = 1$ ، فبالاستناد إلى (77.3) نجد أن $G_1 = I = E_1$ ، وصحة النظرية أمر واضح . لنفرض الآن أن $s > 1$ ولنعرِّف

$$H_{ij} = E_iG_j \,.$$

فبالاستناد إلى (77.1) $H_{ij} = G_jE_i$ ، إذ طالما أن G_j تقبل التبادل مع A فهي تقبل التبادل مع E_i وهي كثيرة حدود سلّمية في A . لنعرِّف الآن

$$M_j = (A - \alpha_j I)\, G_j \,,$$

وهي معـدومـة القوى وفقًا لِـ (77.2) ووفقًا لِـ (77.1) تقبل التبادل مع A وبالتالي مع المصفوفات معدومة القوى $N_i = (A - \alpha_i I)\, E_i$ المذكورة في الفقرة ٧٦ .

والآن لدينا

$$\begin{aligned} A \,.\, H_{ij} &= \alpha_i H_{ij} + (A - \alpha_i I)\, E_iG_j = \alpha_i H_{ij} + N_iG_j \\ &= \alpha_j H_{ij} + (A - \alpha_j I)\, E_iG_j = \alpha_j H_{ij} + M_jE_i \end{aligned}$$

ومنه

$$(\alpha_i - \alpha_j)\, H_{ij} = M_jE_i - N_iG_j$$

ليكن ν_j دليل معدومية القوى في المصفوفة M_j و ν_i دليل N_i ولنفرض أن $\nu_i \geqslant \mu_j$. بما أن جميع المصفوفات المعنيَّة تقبل التبادل فكل حدّ من النوع

$$(M_jE_i - N_iG_j)^{2\mu_j}$$

يحوي ـ كعامل من عوامله ـ إما $M_j^{\mu_j}$ وإما $N_i^{\mu_j}$ وبالتالي فهو يساوي الصفر. وإذا كان $H_{ij} \neq 0$ فهـذا الشرط الأخـير مستحيل، باعتبار أن H_{ij} متساوية القوى و $\alpha_i - \alpha_j \neq 0$. ومنه $H_{ij} = E_i G_j = 0 \; (i \neq j)$. ولدينا إذن من (77.3):

$$G_j = G_j \sum E_i = G_j E_j = E_j \sum G_i = E_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

وهو المطلوب.

تمكّننـا النظرية السابقة من كتابة المصفوفات الرئيسة متساوية القوى ومعدومة القوى الخاصة بمصفوفة A ، وذلك عند كتابة A في صيغة جوردان القانونية. لنفرض أن لـِ A جذورًا مميَّزة متميِّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ مكرّرة $n_1, n_2, \ldots, n_s$ ، على الترتيب. فصيغة جوردان القانونية J للمصفوفة A هو عندئذ مصفوفة تحوي قوالب على طول القطر أي

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix} = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \cdots \dotplus J_s, \qquad (77.5)$$

حيث J_i مصفوفة مربّعة $n_i \times n_i$ تحوي α_i في كل مكان من القطر الرئيس و 1 و / أو أصفـارًا في القطر العلوي الأول، ويتوقف عدد وتوزّع المقادير 1 على قوى القواسم الابتدائية الموافقة للعامل $\lambda - \alpha_i$. لنعتبر الآن المصفوفة التي نحصل عليها من J بوضع أصفار بدلاً من كل J فيما عدا J_i ووضع مصفوفة محايدة $n_i \times n_i$ بدلاً من J_i . إذا دعونا المصفوفة الناتجة E_i ، فنحصل بهذه الطريقة على s من المصفوفات E التي نرى مباشرة أنها تحقّق الشروط (77.1)، ...، (77.4). وهذه المصفوفات E هي إذن المصفوفات الرئيسة متســاوية القـوى الخـاصـة بِـ J في (77.5). وبـالإضـافـة إلى ذلـك فإن المصفـوفـة $N_i = (A - \alpha_i I) E_i$ هي المصفوفة معدومة القوى التي نحصل عليها من J بوضع $\alpha_i = 0$ في J_i ووضع أصفار بدلاً من جميع المصفوفات J الباقية.

توضيـح : لتكن $J = J_1 \dotplus J_2 \dotplus J_3$ ، حيث

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

فعندئذ

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dotplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ومن السهل التحقق من أن المصفوفات الخمس J, E_1, E_2, N_1, N_2 تحقِّق الشروط $(76.5), \ldots, (76.11)$.

٧٨ ـ التعبير عن كثيرة حدود سلَّمية $g(A)$ بدلالة المصفوفات الرئيسة

لتكن

$$g(\lambda) = c_0\lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + \cdots + c_m = \sum_{i=0}^{m} c_i\lambda^{m-i},$$

كثيرة حدود سلَّمية من الدرجة m ، ولتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ جذورها المميَّزة $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. فلدينا من العلاقة (76.11)

$$A = \sum_{j=1}^{s} (\alpha_j E_j + N_j) = \sum E_j(\alpha_j I + N_j),$$

بعد التربيع والاستفادة من الخواص $(76.5), \ldots, (76.11)$:

$$A^2 = \sum_{j=1}^{s} E_j(\alpha_j I + N_j)^2;$$

وبصورة عامة، من أجل أي قوة صحيحة موجبة $m - i$ ومن أجل أي عدد سلَّمي c_i لدينا

$$c_i A^{m-i} = \sum_{j=1}^{s} E_j c_i (\alpha_j I + N_j)^{m-i}. \tag{78.1}$$

وإذا اتّفقنا على اعتبار أنّ $(\alpha_j I + N_j)^0$ هي I وتذكرنا (76.6) ، فمن السهل رؤية أن (78.1) تصحّ أيضًا من أجل $i = m$. ومنه، إذا جمعنا فوق i في طرفي (78.1) نجد :

$$g(A) = \sum_{i=0}^{m} c_i A^{m-i} = \sum_{j=1}^{s} E_j \sum_{i=0}^{m} c_i (\alpha_j I + N_j)^{m-i} = \sum E_j g(\alpha_j I + N_j);$$

أي أنه، إذا كانت $g(A)$ أية كثيرة حدود سلّمية في A فإن

$$g(A) = \sum_{j=1}^{s} E_j g(\alpha_j I + N_j). \tag{78.2}$$

بما أن كل E_j و N_j هي كثيرة حدود سلّمية في A فهي تتبادل مع A وبعضها مع بعض. وفضلاً عن ذلك، وباعتبار أن N_j تسلك في جميع المناحي تمامًا وكأنها عدد سلّمي، باستثناء ما يتعلق بحقيقة أن $N_j^{\nu_j} = 0$ ، فيمكن نشر $g(\alpha_j I + N_j)$ وفقًا لصيغة تايلور فنجد :

$$g_j(N_j) = g(\alpha_j I + N_j) = g(\alpha_j) + g'(\alpha_j) N_j + \frac{g''(\alpha_j)}{2} N_j^2 + \cdots + \frac{g^{(\nu_j - 1)}(\alpha_j)}{(\nu_j - 1)!} N_j^{\nu_j - 1} \tag{78.3}$$

وإذا رمزنا إلى العبارة في الطرف الأيمن من (78.3) بـ $g_j(N_j)$ ، كما أشرنا، فيمكننا كتابة (78.2) على الشكل :

$$g(A) = \sum_{j=1}^{s} E_j g_j(N_j). \tag{78.4}$$

وعلى العكس، أي عبارة من الشكل المذكور في الطرف الأيمن من (78.4) ، حيث g_j كثيرات حدود سلّمية كيفية، تساوي كثيرة حدود في A باعتبار أن كل E_j و N_j هي كثيرة حدود في A .

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية :

نظريـة (٧٨ ـ ١)

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ ، دالتها المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda) = 0$ لها s من الجذور المتميِّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ مكرّرة $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ ، على الترتيب. فيمكن كتابة كل كثيرة حدود سلّمية $g(A)$ في A بدلالة المصفوفات الرئيسة متساوية القوى E_j ، والمصفوفات الرئيسة معدومة القوى N_j وذلك كما في (78.4) ، حيث كثيرات الحدود $g_j(N_j)$ معطاة في

(78.3) . وعلى العكس، كل عبارة من الشكل المبيَّن في (78.4) ، حيث الـ $g_j(N_j)$ كثيرات حدود سلّمية كيفية، تساوي كثيرة حدود في A .

٧٩ ـ حل معادلات جبرية في المصفوفات

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ ، عناصرها a_{ij} تقع في حقل الأعداد المركّبة، ولتكن

$$\pi(\lambda) = p_0 \lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + \ldots + p_{m-1} \lambda + p_m \qquad (79.1)$$

كثيرة حدود سلّمية كيفية. ومسألتنا هي إيجاد مصفوفات X مربّعة $n \times n$ بحيث إن

$$\pi(X) = p_0 X^m + p_1 1^{m-1} + \ldots + p_{m-1} X + P_m I = A \qquad (79.2)$$

وليس لبعض المعادلات من النوع (79.2) حل على الإطلاق. [انظر التمرين ١٦، الفصل ١٥]. وتمتلك معادلات أخرى حلولاً، ولكن لا يمكن التعبير عن أي منها على شكل كثيرات حدود في A . [انظر التمرين ١٨، الفصل ١٥]. ومشكلتنا هي أن نحدِّد الشروط التي يوجد تحتها حلول X يمكن التعبير عنها ككثيرات حدود في A ، وإيجاد X في حال وجودها.

وبالاستناد إلى النظرية (٧٨ ـ ١) فإن أي مصفوفة X يمكن التعبير عنها ككثيرة حدود في A ، تُكتب على الشكل:

$$X = \sum_{j=1}^{s} E_j g_j(N_j) = \sum E_j (x_0^{(j)} + x_1^{(j)} N_j + \cdots + x_{r_j-1}^{(j)} N_j^{r_j-1}),$$

حيث $x_0, x_1, \ldots,$ أعداد مركّبة. وكما في المعادلة (78.1) لدينا

$$p_i X^{m-i} = \sum_{j=1}^{s} E_j p_i [g_j(N_j)]^{m-i},$$

ومنه، بعد التعويض في (79.2) وتعويض A في الطرف الأيمن بقيمتها من (76.11) ، نحصل على المعادلة:

$$\begin{aligned} \pi(X) = \sum_{i=0}^{m} p_i X^{m-i} &= \sum_{j=1}^{s} E_j \Big(\sum_{i=0}^{m} p_i [g_j(N_j)]^{m-i} \Big) \qquad (79.3) \\ &= \sum_{j=1}^{s} E_j (\alpha_j I + N_j). \end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة الأخيرة هذه في E_k متذكرين أن $E_k E_j = 0$ من أجل $j \neq k$ ، نجد

$$\sum_{i=0}^{m} E_k p_i [g_k(N_k)]^{m-i} = E_k(\alpha_k I + N_k), \qquad (k = 1, 2, \cdots, s). \quad (79.4)$$

وهكذا نكون قد استبدلنا، في الحقيقة، s من المعادلات بمعادلة المصفوفات الوحيدة (79.3) ، وجميع هذه المعادلات متشابهة من حيث النوع، وكل معادلة تحوي المصفوفات الرئيسة متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقة لجذر مميَّز وحيد α_k. لُنسقط إذن الدليل k ، ونأخذ $g(N)$ على الشكل:

$$g(N) = x_0 I + x_1 N + x_2 N^2 + \ldots + x_{\nu-1} N^{\nu-1} \quad (79.5)$$

ونحلّ، إذا أمكن، المعادلة

$$E \sum_{i=0}^{m} p_i [g(N)]^{m-i} = E\,\pi [g(N)] = \alpha E + N, \quad (79.6)$$

من أجل الأعداد السلَّمية المجهولة $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$. ويجب القيام بذلك من أجل كل جذر مميَّز α ، ومن المفهوم أن المصفوفتين E و N هما المصفوفتان الرئيستان متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقتان للجذر α.

وبما أن جميع المصفوفات في (79.6) تقبل التبادل، وأن E و N يسلكان من جميع النواحي تمامًا كعددين سلَّميين، فيما عدا أن $N^\nu = 0$ ، فيمكن نشر الدالة $E\,\pi[g(N)]$ وفقًا لدستور تايلور لنجد:

$$E\,\pi [g(N)] = y_0 E + y_1 N + y_2 N^2 + \ldots + y_{\nu-1} N^{\nu-1}.$$

وهنا

$$\begin{aligned}
y_0 &= \pi[g(N)]_{(N=0)} = \pi(x_0); \\
y_1 &= \left(\frac{d\pi}{dg}\cdot\frac{dg}{dN}\right)_{(N=0)} = x_1 \pi'(x_0); \\
y_2 &= \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2\pi}{dN^2}\right)_{(N=0)} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\pi}{dg^2}\left(\frac{dg}{dN}\right)^2 + \frac{d\pi}{dg}\frac{d^2g}{dN^2}\right]_{(N=0)} \\
&= \frac{1}{2}\left[x_1^2 \pi''(x_0) + 2x_2 \pi'(x_0)\right]
\end{aligned} \quad (79.7)$$

$$y_3 = \left(\frac{1}{3!}\frac{d^3\pi}{dN^3}\right)_{(N=0)} = \frac{1}{6}\left[\frac{d^3\pi}{dg^3}\left(\frac{dg}{dN}\right)^3 + \cdots + \frac{d\pi}{dg}\frac{d^3g}{dN^3}\right]_{(N=0)}$$

$$= \frac{1}{6}\left[x_1^3\pi'''(x_0) + \cdots + 6x_3\pi'(x_0)\right];$$

وهكذا.

وتصبح المعادلة (79.6) عندئذ

$$y_0 E + y_1 N + y_2 N^2 + \ldots + y_{\nu-1} N^{\nu-1} = \alpha E + N,$$

ومنه نستنتج، باعتبار أن المصفوفات المعنيَّة هي، وفقًا للنظرية (٧٦ ـ ١)، مستقلة خطيًا

$$\begin{aligned} y_0 &= \pi(x_0) = \alpha, \\ y_1 &= x_1\pi'(x_0) = 1, \\ y_2 &= \tfrac{1}{2}[x_1^2\pi''(x_0) + 2x_2\pi'(x_0)] = 0, \\ y_3 &= \tfrac{1}{6}[x_1^3\pi'''(x_0) + \cdots + 6x_3\pi'(x_0)] = 0, \end{aligned} \tag{79.8}$$

إلخ.

ومن أولى هذه المعادلات، يتّضح أنه يمكن أخذ x_0 كأي جذر للمعادلة

$$\pi(x_0) = \alpha \tag{79.9}$$

إذا كان $\nu = 1$، أي إذا كان $N = 0$، فإن العملية تنتهي وتكون $g(N)$ في (79.5) قد حُدِّدت. أما إذا كان $\nu > 1$، أي إذا كان α جذرًا مكررًا للمعادلة المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda) = 0$، فيجب بعدها إيجاد x_1. ومن المعادلة الثانية في (79.8) يمكن إيجاد x_1 إذا وفقط إذا كان $\pi'(x_0) \neq 0$، أي إذا وفقط إذا لم يكن x_0 جذرًا مكررًا لـ (79.9).

وينبغي ملاحظة أن الأعداد السلَّمية $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ التي نريد تحديدها كي نجد $g(N)$ في (79.5)، تُدخل دائمًا المعادلات (79.8) للمرَّة الأولى مع المعادلات $\pi'(x_0)$، بحيث إنه إذا لم يكن x_0 جذرًا مكررًا لـ (79.9)، فيمكننا دائمًا وبصورة وحيدة إيجاد الأعداد السلَّمية x_i بدلالة $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}$.

ويجب القيام بهذه العملية من أجل كل جذر α_j للمعادلة المميّزة المختزلة. وإذا كانت العملية فاشلة من أجل أي جذر α_j، فلا توجد مصفوفة X يمكن التعبير عنها

ككثيرة حدود في A وتحقِّق (79.2).

وهكذا نكون قد أقمنا البرهان على النظرية:

نظريـة (٧٩ ـ ١)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ ولتكن $\pi(\lambda)$ كثيرة حدود سلّمية. فالشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $\pi(X) = A$ حل X يمكن التعبير عنه ككثيرة حدود في A هو أن يكـون للمعـادلـة $\pi(x) = \alpha_i$ جذر بسيط واحد على الأقل وذلك من أجل كل جذر مكرر α_i للمعادلة المميَّزة المختزلة لِـ A.

٨٠ ـ معادلة المصفوفات $X^m = A$

ليكن m عددًا صحيحًـا موجبًـا ما أكبر من الواحد ولتكن $\phi(\lambda) = 0$ المعادلة المـميَّزة المختـزلـة لِـ A، بحيث تمتلك الجـذور المتميِّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$. إذا كان $\alpha_i \neq 0$، فجـذور المعـادلـة $x^m = \alpha_i$ كلّهـا متميِّزة. وبـالتـالي، ووفقًـا للنـظرية (٧٩ ـ ١)، إذا كانت A غير شاذة فإن للمعـادلـة $X^m = A$ دائـمًا حلًّا من أجل X يمكن التعبـير عنـه ككثـيرة حدود في A. وإذا كانت A شاذة بحيث إن إحـدى الجـذور، α_s مثـلًا، هو الصفـر، فمن جديد يكـون للمعـادلـة $X^m = A$ حل من أجل X يمكن التعبير عنه ككثيرة حدود في A، شريطة ألَّا يكون الجذر $\alpha_s = 0$ مكررًا من أجـل $\phi(\lambda) = 0$. ولـنـفـرض، على أي حال، أن $\alpha_s = 0$ جذر مكـرر لِـ $\phi(\lambda) = 0$. بما أنـه ليس للمعـادلـة $x^m = \alpha_s = 0$ جذر بسيط، وإنـما جذر مكـرر فقط $x = 0$، فلا يكون للمعادلة $X^m = A$، وفقًا للنظرية (٧٩ ـ ١)، حل من أجل X يمكن التعبير عنه ككثيرة حدود في A.

وهكذا نكون قد برهنَّا النظرية التالية:

نظريـة (٨٠ ـ ١)

ليكن m عددًا صحيحًـا موجبًـا أكـبر أو يسـاوي 2 ولتكن A مصفـوفة مربّعة $n \times n$. فلمعـادلـة المصفـوفـات $X^m = A$ دائمًا حل من أجل X يمكن التعبير عنه ككثـيرة حدود في A، هذا إذا كانت A غير شاذة. وإذا كانت A، على أي حال،

شاذة، فللمعادلة حل من أجل X ، يمكن التعبير عنه ككثيرة حدود في A ، إذا وفقط إذا لم يكن الصفر جذرًا مكررًا للمعادلة المميَّزة المختصرة لـ A .

توضيح: المعادلة $X^2 = A$ ، حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، لا تقبل حلًّا من أجل X ككثيرة حدود في A . ذلك لأن $\alpha = 0$ هو جذر مضاعف للمعادلة المميزة المختصرة لـ A ، *وليس للمعادلة* $\lambda^2 = \alpha$ *في هذه* الحالة $(\alpha = 0)$ جذر بسيط. وفي الحقيقة، فليس للمعادلة المعطاة أي حل على الإطلاق. [انظر مثال ١٦ في الفصل ١٥].

إذا كان للمعادلة $X^m = A$ حل على شكل كثيرة حدود في A ، فربما كانت أبسط طريقة لإيجاد حلّ هي باستخدام قانون ذات الحدَّين. ذلك لأنه وفقًا لـ (76.11) يمكن كتابة A على الشكل:

$$A = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i E_i + N_i) = \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i E_i + N_i) + (\alpha_s E_s + N_s), \quad (80.1)$$

وبما أنه إما أن يكون $\alpha_s \neq 0$ ، أو إذا كان $\alpha_s = 0$ ، فعندئذ $N_s = 0$ أيضًا، فإن الحدَّ بين الهلالين الأخيرين يكون بكليَّته مفقودًا. ولنا حق وضع مثل هذا الفرض الأخير، باعتبار أنه في الحالة المعاكسة، ووفقًا للنظرية (٨٠ ـ ١)، سوف لا تكون المعادلة المعطاة قابلة للحلّ. ووفقًا لقانون ثنائية الحد، لدينا، باعتبار أن E_i متساوية القوى،

$$\begin{aligned} A^{1/2} &= \sum \alpha_i^{1/2}\left(E_i + \frac{N_i}{\alpha_i}\right)^{1/2} \\ &= \sum \alpha_i^{1/2}\left[E_i + \frac{1}{2}\frac{N_i}{\alpha_i} - \frac{1}{8}\frac{N_i^2}{\alpha_i^2} + \frac{1}{16}\frac{N_i^3}{\alpha_i^3} + \cdots\right], \end{aligned} \quad (80.2)$$

حيث تنتهي العبارة بين القوسين المربّعين بعد ν_i من الحدود، طالما أن $N_i^{\nu_i} = 0$ ، وحيث يمتد المجموع من 1 إلى s أو من 1 إلى $s - 1$ ، وفقًا لما إذا كانت A غير شاذة أو شاذة.

توضيح ١: إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

فلدينا بالتجربة،

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N_2 = 0.$$

ومن العلاقة

$$A = 4\,E_1 + N_1 + 9\,E_2$$

لدينا مباشرة:

$$A^{1/2} = \pm 2[E_1 + \tfrac{1}{4}N_1]^{1/2} \pm 3E_2,$$

ومنه

$$A^{1/2} = \pm 2[E_1 + \tfrac{1}{8}N_1] \pm 3E_2.$$

وإذا أخذنا إشارة + في كلا الحدين، نجد

$$X = A^{1/2} = 2E_1 + \tfrac{1}{4}N_1 + 3E_2 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ومن السهل التحقق من أن $X^2 \equiv A$.

توضيح ٢ : إذا كانت A هي المصفوفة المربّعة 3×3 في الفقرة ٧٦،

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، وعندئذ $A = (E_1 + N_1) + 3\,E_2$ ، حيث E_1 ، N_1 و E_2 معطاة في الفقرة ٧٦ .

ومنه $A^{1/2} = E_1 + \frac{1}{2} N_1 + \sqrt{3}\, E_2$. وإذا عوضنا من أجل E_1 ، N_1 و E_2 كما هي معطاة في الفقرة ٧٦، نجد

$$A^{1/2} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2+2\sqrt{3} & 2-2\sqrt{3} & -2+2\sqrt{3} \\ 4+\sqrt{3} & 10-\sqrt{3} & -6+\sqrt{3} \\ 2+3\sqrt{3} & 8-3\sqrt{3} & -4+3\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

٨١ ـ محصلة كثيرتي حدود

لتكن $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرتي حدود سلّميتين من الدرجة n و m ، على الترتيب، معاملاتهما في حقل $\mathscr{F}$ ،

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \quad (a_0 \neq 0), \tag{81.1}$$

$$g(\lambda) = b_0 \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \ldots + b_m, \quad (b_0 \neq 0), \tag{81.2}$$

لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ جذور $f(\lambda) = 0$ و $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ جذور $g(\lambda) = 0$. وعندئذ يُعرَّف $R(f, g)$ ، محصلة f و g ، على أنه :

$$R(f, g) = a_0^m\, g(\alpha_1)\, g(\alpha_2) \ldots g(\alpha_n)^{(*)} \tag{81.3}$$

وبصورة مشابهة، يُعرَّف $R(f, g)$ ، محصلة g و f على أنه

$$R(g, f) = b_0^n\, f(\beta_1)\, f(\beta_2) \ldots f(\beta_m) \tag{81.4}$$

ومن السهل تبيان أن $R(f, g)$ و $R(g, f)$ يختلفان على الأكثر في الإشارة.

وبما أن $a_0 \neq 0$ ، فمن الواضح أن $R(f, g)$ ينعدم إذا، وفقط إذا، كان واحد على الأقل من المقادير $g(\alpha_i)$ صفرًا، أي إذا وفقط إذا كان للمعادلتين $f(\lambda) = 0$ و $g(\lambda) = 0$ جذر واحد مشترك على الأقل.

ومن التعريف (81.3) يتضح أن $R(f, g)$ كثيرة حدود متجانسة في المقادير b . وفضلاً عن ذلك، وباعتبار R دالة متناظرة في المقادير α ، يمكننا التعبير عنه على شكل كثيرة حدود في الدوال الابتدائية المتناظرة في المقادير α ، $a_1 / a_0, a_2 / a_0, \ldots, a_n / a_0$ ،

(*) Dickson, *First Course in the Theory of Equation,* (New York, 1922), pp. 143-147.

وأخيراً، وبسبب العامل a_0^m ، على شكل كثيرة حدود متجانسة من الدرجة m في المقادير a ، وبنقاش مماثل، من الدرجة n في المقادير b .

وربما كانت الطريقة المألوفة أكثر لإيجاد $R(f, g)$ هي طريقة سيلفستر الدّيلزيّة Sylvester's Dialytic في الحذف وهي تقود إلى عبارة من أجل R على شكل محدّد مصفوفة مربّعة $(m + n) \times (m + n)$. وسنطوِّر طريقة مصفوفية تعبِّر عن R كمحدّد مصفوفة مربّعة $m \times m$ أو مصفوفة مربّعة $n \times n$.

لنقسِّم $f(\lambda)$ في (81.1) على a_0 ، فنحصل هكذا على كثيرة حدود $\frac{1}{a_0} f(\lambda)$ ، معامل الحد الرئيس فيها هو الواحد. وإذا كانت A عندئذ أية مصفوفة مربّعة $n \times n$ دالتها المميَّزة $\frac{1}{a_0} f(\lambda)$ [ويمكن الحصول على مصفوفة كهذه بعدة طرق، مثلاً، كما في (69.2)]، فنستنتج من النتيجة (٧٥ ـ ٢) أن

$$R(f, g) = a_0^m |g(A)|. \tag{81.5}$$

وهكذا نعبِّر عن المحصلة $R(f, g)$ لكثيرتي حدود $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ من الدرجة n و m ، على الترتيب، كمحدّد مصفوفة مربّعة $n \times n$. وبطريقة مشابهة، نستنتج أنه يمكن التعبير عن $R(g, f)$ كمحدّد مصفوفة مربّعة $m \times m$

$$R(g, f) = b_0^n |f(B)| \tag{81.6}$$

حيث B مصفوفة مربّعة $m \times m$ دالتها المميَّزة $\frac{1}{b_0} g(\lambda)$. ولكن يمكننا المضيّ إلى أبعد من ذلك. وفي الحقيقة سنبرهن النظرية التالية:

نظرية (٨١ ـ ١)

لتكن $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ كثيرتي حدود سلّميتين من الدرجة n و m على الترتيب، معاملاتها في حقل $\mathcal{F}$ ، وعلى سبيل المثال، كثيرتا الحدود في (81.1) و (81.2). إذا كانت A مصفوفة غير متردية دالتها المميَّزة $\frac{1}{a_0} f(\lambda)$ ، وكانت τ صفرية المصفوفة $g(A)$ ، فعندئذ يكون القاسم المشترك الأعظم لِـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ من الدرجة τ .

لبرهـان هذه النـظرية نلاحظ أولاً أنـه إذا كانت C أي مصفـوفـة مشـابهـة لـ A ، بحيث إن $P^{-1}AP = C$ ، فعندئذ $P^{-1}[g(A)]P = g(C)$. وبالتالي يكون للمصفـوفتـين $g(A)$ و $g(C)$ الـرتبـة r نفسهـا، والصفـرية نفسهـا $\tau = n - r$. وفضـلاً عن ذلك فإن لِـ A و C الدالة المميّزة نفسها. ويمكننا إذن الافتراض أن A هي في صيغـة جوردان القـانونية. لنفرض الآن أن A مصفوفة غير مترديّة لمعادلتها المميَّزة جذور متميِّزة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ مكـرَّرة $n_1, n_2, \ldots, n_s$ ، على الترتيب. إن صيغة جوردان القانونية هي مصفوفة تحوي قوالب على طول القطر:

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix} \qquad (81.7)$$

حيث J_i مصفـوفـة $n_i \times n_i$ من النوع (74.1) حيث نضع α_i بدلاً من α . وهكذا فإن لكـل J_i قاسـمًا ابتـدائيًّا $(\lambda - \alpha_i)^{n_i}$. والمصفوفة $g(A)$ معطاة في (75.2) حيث $g(J_i)$ هي المصفوفة المربّعة $n_i \times n_i$ في (74.3) بعد وضع α_i بدلاً من α و n_i بدلاً من n .

لنـرمـز بِـ r_i و τ_i للمـرتبـة والصفـرية، على الترتيب، للمصفوفة $g(J_i)$ المربّعة $n_i \times n_i$ ، بحيث يكـون $n_i - r_i = \tau_i$. وبـما أن $g(A)$ تتـألف من مصفـوفـات على شكل قوالب قطرية منفصلة بعضها عن البعض الآخر، فمن غير الصعب رؤية أن الرتبة r لِـ $g(A)$ تساوي Σr_i . وبما أن $n = \Sigma n_i$ ، نستنتج أن الصفرية τ لِـ $g(A)$ تساوي $\Sigma \tau_i$.

والآن نجد وفقًا للنظرية (٧٤ ـ ١)، ومن أجل $\tau_i < n_i$ ، أن $g(\lambda)$ يقبل القسمة على $(\lambda - \alpha_i)^{\tau_i}$ ولكن ليس على $(\lambda - \alpha_i)^{\tau_i + 1}$. ومنـه باعتبار أن $f(\lambda)$ يقبل القسمة على $(\lambda - \alpha_i)^{n_i}$ ، $(n_i \geqslant \tau_i)$ ، فإن القـاسم المشترك الأعظم لِـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ يقبل القسمة على $(\lambda - \alpha_i)^{\tau_i}$ ولكن ليس على $(\lambda - \alpha_i)^{\tau_i + 1}$. وتصـحّ هذه العبـارة الأخـيرة من أجل $\tau_i = n_i$. ذلـك لأنـه، وفـقًـا للنـظرية (٧٤ ـ ١)، تقبـل $g(\lambda)$ القسمـة على $(\lambda - \alpha_i)^{n_i}$ بينـما تقبـل $f(\lambda)$ بالفـرض القسمـة على القوة نفسها ولكن ليس على قوة أعلى. وبما أن المقادير α جميعها متميِّزة فنستنتج أن القاسم المشترك الأعظم لِـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ هو بدقة

$$h(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{\tau_1} (\lambda - \alpha_2)^{\tau_2} \dots (\lambda - \alpha_s)^{\tau_s},$$

ومن الواضح أنه من الدرجة $\sum \tau_i = \tau$. وهو المطلوب.

توضيح : ليكن $f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2$ ، و $g(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$. ونأخذ كمصفوفة A دالتها المميَّزة $f(\lambda)$ الصيغة القانونية القياسية

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فعندئذ

$$g(A) = A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = R.$$

ومحدّد المصفوفة R المكتوبة أخيراً هو المحصلة لكثيرتي الحدود $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$. وبما أن المحدَّد ينعدم، فإن لِـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ عاملاً مشتركًا لا يساوي الواحد. ولكن أكثر من ذلك، وباعتبار أن رتبة R هي 1 وبالتالي صفرية R هي 2 ، فإن لِـ f و g قاسمًا مشتركًا أعظم من الدرجة 2 . وبما أن $g(\lambda)$ نفسه تربيعي، فلا بد أن يكون $g(\lambda)$ نفسه هو القاسم المشترك الأعظم. ومن السهل التحقق من أن

$$f(\lambda) = (\lambda - 2)\, g(\lambda) \qquad (81.8)$$

وبـدلاً من أخذ A كمصفوفة 3×3 دالتها المميَّزة $f(\lambda)$ وتشكيل $g(A)$ ، كان يمكننـا أخذ B كمصفوفة 2×2 بدالة مميَّزة $g(\lambda)$ وتشكيل $f(B)$. وفي هذه الحالة، وبـاعتبار $g(\lambda)$ الدالة المميَّزة المختزلة لِـ B ، يمكننا بقسمة $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ التعبير عن

$f(B)$ ككثيرة حدود $r(B)$ ، حيث $r(\lambda)$ هو الصفر أو من الدرجة 1 على الأكثر. وهنا $r(B) = 0$ ، وبما أن للمصفوفة صفر 2×2 ، صفرية تساوي 2 ، فنستنتج أن لـ $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ قاسمًا مشتركًا أعظم من الدرجة 2. وتُستنتج هذه الحقيقة أيضًا بصورة مباشرة من (81.8).

لنكن $f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ كثيرة حدود سلّمية من الدرجة n ومعاملاتها في حقل $\mathscr{F}$. إذا كان $f'(\lambda) \equiv \frac{df}{d\lambda}$ المشتق الأول لـ f . فيُبرهن في الكتب المدرسية المتعلقة بنظرية المعادلات أن المميّز Δ لـ $f(\lambda)$ معطى بالعلاقة

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(f, f')^{(*)} \tag{81.9}$$

ومنه، ووفقًا للطريقة التي وصفناها لتوّنا، يمكن التعبير عن Δ كمحدّد إما لمصفوفة مربّعة $n \times n$ ، أو لمصفوفة مربّعة $(n-1) \times (n-1)$ ، بعناصر في $\mathscr{F}$. ولكن يمكن المضي إلى أبعد من ذلك. وفي الحقيقة يمكن برهان النظرية التالية:

نظريـة (٨١ ـ ٢)

لتكن $f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ كثيرة حدود سلّمية من الدرجة n معاملاتها في حقل $\mathscr{F}$. ولتكن A مصفوفة غير متردّية دالّتها المميّزة $f(\lambda)$. إذا كانت r رتبة المصفوفة $f'(A)$ ، فللمعادلة $f(\lambda) = 0$ عندئذ r من الجذور المتميّزة.

لبرهان هذه النظرية، نلاحظ أنه وفقًا للنظرية (٨١ ـ ١)، إذا كانت $\tau = n - r$ صفرية المصفوفة R ، فإن لكثيرتي الحدود $f(\lambda)$ ، $f'(\lambda)$ قاسمًا مشتركًا أعظم $h(\lambda)$ من الدرجة τ . وبما أنه يوافق كل عامل مكرَّر $(\lambda - \alpha)^\nu$ $(\nu \geqq 2)$ لـ f عامل $(\lambda - \alpha)^{\nu - 1}$ لـ f' ، فنستنتج أن $f(\lambda) / h(\lambda)$ يحوي مرّة واحدة تمامًا كلًّا من الـ $r = n - \tau$ عاملاً خطيًّا لـ $f(\lambda)$.

توضيح : ليكن المطلوب إيجاد مميّز المعادلة التكعيبية

$$f(\lambda) = \lambda^3 + p\lambda + q$$

(*) Dickson, *op. cit.*, p. 152.

هنا $f'(\lambda) = 3\lambda^2 + p$. وكمصفوفة A نأخذ مصفوفة غير متردِّية مربعة 3×3 دالتها المميَّزة $f(\lambda)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -q & -p & 0 \end{bmatrix};$$

فنجد عندئذ

$$R = f'(A) = 3A^2 + pI = 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -q & -p & 0 \\ 0 & -q & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 3 \\ -3q & -2p & 0 \\ 0 & -3q & -2p \end{bmatrix},$$

ومنه

$$\Delta = -|R| = -4p^3 - 27q^2$$

إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن رتبة R تساوي 3 ، أي أن لِـ $f(\lambda) = 0$ ثلاثة جذور متميِّزة. وإذا كان $\Delta = 0$ ، p و q لا يساويان الصفر معًا، فإن رتبة R هي 2 ، أي أن لِـ $f(\lambda) = 0$ جذرين متميِّزين، أحدهما مضاعف. وأخيرًا إذا كان $p = q = 0$ ، فإن رتبة R هي الواحد أي أن لِـ $f(\lambda) = 0$ جذرًا مكررًا ثلاث مرات.

٨٢ - مميز ويَـرْ Weyr (*)

لنعتبر أولاً مصفوفة A ، معدومة القوى، ومربّعة $n \times n$ ، عناصرها في حقل $\mathscr{F}$. إذا كانت A معدومة القوى ودليلها ν ، فإن الدالة المميَّزة المختزلة لِـ A هو λ^{ν} ، ويُشكِّل العامل λ^{ν} ، ولو لمرة واحدة على الأقل؛ قاسمًا ابتدائيًا للمصفوفة المميَّزة لِـ A . لنفرض أن لِـ $A - \lambda I$ قواسم ابتدائية هي المقدار λ مكررًا عددًا من المرات

(*) Edward Weyr, (1852 - 1903).

يساوي m_1 والمقدار λ^2 مكررًا m_2 مرة، . . . ، والمقدار λ^ν مكررًا m_ν مرة. وباعتبار أن جداء القواسم الابتدائية يساوي، باستثناء ما قد يتعلق بالإشارة، الدالة المميِّزة فنجد مباشرة أن

$$m_1 + 2m_2 + \ldots + \nu m_\nu = n.$$

وبما أن رتبة A^i لا يمكن أن تتجاوز رتبة A^{i-1} فمن الواضح أن صفرية المصفوفة السابقة لا يمكن أن تكون أقل من صفرية المصفوفة اللاحقة. لنرمز بـ

$$\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \ldots, \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_i, \ldots, \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\nu,$$

لِصفرية المصفوفات

$$A, A^2, \ldots, A^i, \ldots, A^\nu, \quad (A^\nu = 0),$$

على الترتيب. أي أن μ_i ترمز لزيادة صفرية A^i فوق صفرية A^{i-1}. فتتألف صيغة جوردان القانونية لِـ A من Σm_i من القوالب القطرية المنفصل بعضها عن بعض من الشكل (0) ، وهي الموافقة للقاسم الابتدائي الخطِّي λ ، أو من الشكل

(مربّعة $k \times k$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

وهي الموافقة للقاسم الابتدائي λ^k $(k > 1)$. وباعتبار أن صفرية كل قالب هي الواحد، فنستنتج أن

$$\mu_1 = m_1 + m_2 + \cdots + m_\nu.$$

ومن السهل أن نرى عند تشكيل A^2 أن صفرية كل قالب 1×1 ، أي القالب (0) ، لا تتغير، بينما تزداد صفرية كل قالب من مرتبة $k > 1$ بمقدار الواحد. ومنه

$$\mu_2 = m_2 + m_3 + \cdots + m_\nu;$$

وبصورة عامة:

$$\mu_i = m_i + m_{i+1} + \cdots + m_\nu$$

و

$$\mu_\nu = m_\nu.$$

لنعرض الآن هذه الأعداد μ_i كصفوف من النقط في مخطط فِرّرز (Ferrers) العادي، فنجد

		m_ν	$m_{\nu-1}$		m_2	m_1
μ_1	:	$\cdots\cdot$	$\cdots$	___	$\cdots$	$\cdots\cdot$
μ_2	:	$\cdots\cdot$	$\cdots$	___	$\cdots$	
	:					
$\mu_{\nu-1}$	:	$\cdots\cdot$	$\cdots$			
μ_ν	:	$\cdots\cdot$				

ومن الواضح أن عدد النقاط الكلّي في الجدول بكامله هو $\Sigma\, im_i = n$. وإذا أحصينا النقاط عن طريق الأعمدة، نرى أنه يوجد m_ν من الأعمدة كل منها يحوي ν من النقاط، $m_{\nu-1}$ من الأعمدة كل منها يحوي $\nu - 1$ من النقاط، وأخيراً m_1 من الأعمدة يحوي كل منها نقطة واحدة. وهكذا يكون العدد الكلّي للأعمدة في الجدول أعلاه التي تحوي i نقطة مساويًا تمامًا لعدد القواسم الابتدائية λ^i لـ $A - \lambda I$.

وتدعى مجموعة الأعداد $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu)$ مميِّز وِيَرْ (Weyr) للمصفوفة معدومة القوى A . ومميِّز سِجر (Segre) للمصفوفة A نفسها هو:

$$(\nu, \ldots, \nu, \nu-1, \ldots, \nu-1, \ldots, 2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1),$$

حيث تُكتب ν عددًا من المرّات يساوي m_ν ، وتُكتب $\nu - 1$ عددًا من المرّات يساوي $m_{\nu-1}$ مرة. . . إلخ.

ومن الواضح إذن أن مميِّز وِيَرْ (Weyr) وسِجَر (Segre) هما تجزئتان مترافقتان للعدد الصحيح n .

توضيح : لتكن A مصفوفة معدومة القوى 13×13 تمتلك مصفوفتها المميَّزة القواسم الابتدائية $\lambda^5, \lambda^4, \lambda^2, \lambda^2$. بحيث يكون مميِّز سِجَر (Segre) هو $(5, 4, 2, 2)$. ومخطط فِرّرز (Ferrers) هو عندئذ

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & \end{matrix}$$

حيث يحوي العمود الأول 5 نقاط، ويحوي العمود الثاني 4 نقاط، إلخ. وبإحصاء النقاط وفقًا للصفوف نرى أن مميِّز وِيَرْ (Weyr) هو $(4, 4, 2, 2, 1)$. والآن لتكن A مصفوفة مربّعة دالتها المميَّزة هي

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \ldots, (\lambda - \alpha_s)^{n_s} \quad (\sum n_i = n),$$

حيث المقادير α جميعها متميِّزة. إذن تتألف صيغة جوردان القانونية لِـ A من s من القوالب القطرية المنفصلة

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_s \end{bmatrix},$$

حيث A_i مصفوفة مربّعة $n_i \times n_i$ دالَّتها المميَّزة $(\lambda - \alpha_i)^{n_s}$ ، وبما أن الجذور $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ جميعها متميِّزة فالمصفوفة $A_j - \alpha_k I$ غير شاذة إذا كان $j \neq k$ وبالتالي لها صفرية مساوية للصفر. ومنه فإن صفرية $(A - \alpha_k I)^m$ تساوي تمامًا تلك الموافقة لِـ $(A_k - \alpha_k I)^m$. ونستنتج إذن أن مميِّز وِيَرْ (Weyr) الخاص بالمصفوفة $A - \alpha_k I$ يحدِّد مميِّز سِجر (Segre) وبالتالي القواسم الابتدائية الموافقة للعامل $\lambda - \alpha_k$.

توضيح : الدالَّة المميِّزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$f(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 3)$. ونجد أن صفرية المصفوفات $A - I, (A - I)^2, (A - I)^3, \ldots$ هي $\ldots ,2 ,2 ,1$ على الترتيب، بينما نجد أن صفرية المصفوفات $A - 3I, (A - 3I)^2, (A - 3I)^3, \ldots$ هي $\ldots ,1 ,1 ,1$ ، على الترتيب. ويوافق الجذر المميَّز $\lambda = 1$ مخطط فِرّرز (Ferrers) التالي:

$$\mu_1 : .$$

$$\mu_2 : .$$

بحيث يكون مميَّز سِجر (Segre) مساويًا لـ (2) . أي أن لـ $A - \lambda I$ القاسم الابتدائي $(\lambda - 1)^2$. وبصورة مشابهة، وفي مقابل الجذر $\lambda = 3$ نحصل من أجل $A - \lambda I$ على القاسم الابتدائي $\lambda - 3$.

٨٣ - تطبيق مميَّز وِيَرْ (Weyr)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathcal{F}$ ، ولنفرض أن الدالة المميَّزة المختزلة لـ A هو $(\lambda - \alpha)^n$ ، حيث تقع α في $\mathcal{F}$. فيمكننا عندئذ، وكما في الفقرة **٧٤**، كتابة:

$$A = \alpha I + N,$$

حيث N معدومة قوى دليلها n . إذا كانت $g(\lambda)$ أي كثيرة حدود سلّمية معاملاتها في $\mathcal{F}$ ، فلدينا كما في (74.2):

$$g(A) = g(\alpha)I + g'(\alpha)N + \frac{g''(\alpha)}{2}N^2 + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}N^{n-1}. \quad (83.1)$$

لتكن $B = g(A)$ ، فعندئذ إذا كان $g'(\alpha) \neq 0$ ، فلدينا

$$B - g(\alpha)I = N[g'(\alpha) + \frac{1}{2}g''(\alpha)N + \ldots], \quad (83.2)$$

ومنه يتضح أن $B - g(\alpha)I$ معدومة قوى دليلها n . أي أن الدالّة المميَّزة المختزلة لـ B هي $[\lambda - g(\alpha)]^n$ ، أو بعبارة أخرى، تمتلك المصفوفة $B - \lambda I$ قاسمًا ابتدائيًّا وحيدًا هو $[\lambda - g(\alpha)]^n$.

والآن لنفرض أن

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad g^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

فإذا كان $k \geqslant n$ ، نجد من (83.1) أن $g(A) = g(\alpha)I$ ، بحيث تكون $g(A)$ مصفوفة

سلَّمية لها n من القواسم الابتدائية الخطِّية $\lambda - g(\alpha)$.

أما إذا كان $k < n$ فإن (83.2) تصبح

$$B - g(\alpha) I = N^k (c_0 + c_1 N + c_2 N^2 + \ldots), \quad (c_0 \neq 0)$$

لنقسِّم n على k بحيث نكتب

$$n = q k + d \quad (0 \leqslant d < k).$$

وبالاستناد إلى الفقرة ٧٤ تكون صفريات القوى المتتالية لِـ $B - g(\alpha) I$ هي

$$k, 2k, \ldots, q k, n,$$

بحيث إن

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_q = k, \quad \mu_{q+1} = n - q k = d.$$

ومخطط فِرّرز (Ferrers) هو إذن

μ_1 : . . . . . k نقطة,

μ_2 : . . . . . k نقطة,

- - - - - - - - - - - - - - - - -

μ_q : . . . . . k نقطة,

μ_{q+1} : . . . . . k نقطة.

ومنه يكون لِـ $(B - \lambda I)$ عدد d من القواسم الابتدائية $[\lambda - g(\lambda)]^{q+1}$ و $k - d$ من القواسم الابتدائية $[\lambda - g(\lambda)]^q$.

تمارين

في كل من التمارين من ١ إلى ٦ حدِّد ما إذا كانت توجد أو لا مصفوفة X يمكن التعبير عنها ككثيرة حدود في A تحقِّق المعادلة المعطاة وأوجد جميع المصفوفات X من هذا النوع في حال وجودها.

١) $X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢) $X^2 = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٣) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ٤) $X^3 = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

٥) $X^2 - 2X + 5I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ٦) $X^2 - X + 2I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

من أجل كل من المصفوفات A في التمارين (٧ ـ ١١) أوجد المصفوفتين الرئيستين متساوية القوى ومعدومة القوى E_i و N_i ، واستخدمهما لحلّ المعادلات المشار إليها، إذا أمكن ذلك:

٧) $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 6 & 1 & -5 \end{bmatrix}$: حل $X^2 = A$; حل أيضًا $X^2 - 4X + 5I = A$.

٨) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$: حل $X^2 - 5X + 7I = A$; أيضًا $X^2 - 2X + 2I = A$.

٩) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$: حل $X^2 - 2X + 3I = A$.

١٠) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}$: حل $3X^2 + X - 3I = A$.

١١) $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$: حل $X^2 = A$.

١٢) لتكن $\pi(X)$ أية كثيرة حدود سلّمية من درجة أكبر أو تساوي 1 . بيّن أنه إذا كان للمعادلة المميَّزة المختزلة لِـ A جذور جميعها متميِّزة عن بعضها، فللمعادلة $\pi(X) = A$ دائمًا حل من أجل X يمكن التعبير عنه ككثيرة حدود في A .

١٣) لتكن المصفوفة A المربعة $n \times n$ معدومة قوى دليلها v . بيِّن أنه ليس للمعادلة $X^m = A$ حل إذا كان $mv \geqslant m + n$.

استخدم طريقة الفقرة ٨١ لتحديد ما إذا كان للزوج التالي من كثيرات الحدود $f(\lambda)$ و $g(\lambda)$ عامل مشترك $\neq 1$ أم لا ، وحدِّد درجة القاسم المشترك الأعظم .

١٤) $f(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2,\ g(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3;$

١٥) $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 10,\ g(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6;$

١٦) $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2,\ g(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda - 4.$

استخدم طريقة الفقرة ٨١ وأوجد مصفوفة محدِّدها هو مميِّز المعادلات ١٧ ، ١٨ و١٩ وحدِّد عدد الجذور المتميِّزة لكل معادلة

١٧) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$ ، ١٨) $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

١٩) $\lambda^4 + \lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$.

من أجل كل من المصفوفات التالية A في ٢٠ إلى ٢٧ حدِّد مميِّز ويَرْ (Weyr) وبعدئذ مميِّز سِجر (Segre) والقواسم الابتدائية للمصفوفة $A - \lambda I$.

٢٠) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

٢١) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

٢٢) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

٢٣) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

٢٤) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

٢٥) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

٢٦) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

٢٧) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

من أجل كل من المصفوفات A في ٢٨، ٢٩ و٣٠ والدالة المعطاة $g(\lambda)$ حدِّد بطريقة الفقرة ٨٣ القواسم الابتدائية للمصفوفة $g(\lambda) - \lambda I$.

٢٨) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad g(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3;$$

٢٩) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \qquad g(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 9;$$

٣٠) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dot{+} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad g(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 3.$$

٣١) لتكن A مصفـوفة مربّعة $n \times n$ فوق حقل الأعداد المركّبة، وليكن k أي عدد مركّب. إذا كانت $B = A - kI$ عندئذ، فبيِّن أن المصفوفتين الرئيستين معدومة القوى ومتساوية القوى الخاصتين بـ B متطابقتان مع تلك الخاصة بـ A .

٣٢) إذا كانت G المصفوفة المتعامدة الحقيقية

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

فبيِّن أنه يمكن كتابة المصفوفة الدوَّارة $a_{ij} = a_{j-i}$ المربَّعة $n \times n$ المذكورة في الفقرة **٢٩** على الشكل $A = a_0 I + a_1 G + \ldots + a_{n-1} G^{n-1}$. استخدم هذه الحقيقة لبرهان النظرية (**٢٩ ـ ١**)، النتيجتين (**٢٩ ـ ٢**) و(**٢٩ ـ ٣**)، والتمرينين **١١** و**١٢** بطريقة جديدة.

الفصل السابع عشر

اختزال مصفوفة
إلى صيغة قانونيّة

٨٤ - نص المسألة

لنرمز بـ A و B لمصفوفتين مربّعتين عناصرهما في حقل $\mathscr{F}$. إذا وُجدت مصفوفة غير شاذة $P = (p_{ij})$ عناصرها في $\mathscr{F}$ ، أو توسيع للحقل $\mathscr{F}$ ، بحيث إن

$$P^{-1}AP = B \tag{84.1}$$

فيُقال عندئذ إن A و B متشابهتان. وقد بيَّنا في الفقرة **٥٩** أن الشرط اللازم والكافي لتشابه المصفوفتين A و B هو أن يكون للمصفوفتين $A - \lambda I$ و $B - \lambda I$ العوامل اللامتغيرة نفسها، أو إذا فضّلنا، القواسم الابتدائية نفسها. وإذا كان هذا الشرط الأخير محققًا فيمكننا إيجاد P بإيجاد مصفوفة غير شاذة P تحقّق $AP = PB$. ويكافيء هذا الشرط نظامًا من n^2 من المعادلات الخطّية المتجانسة في n^2 من المجاهيل p_{ij} .

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}p_{kj} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}b_{kj} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{84.2}$$

وهكــذا فإنــه إذا أمكن إيجـاد P محققـة للعـلاقـة (84.1) فيمكن اختيار عنـاصر P من الحقل $\mathscr{F}$.

ولطريقة إيجاد P عن طريق حل مجموعة المعادلات (83.2) بعض المميِّزات بالنسبة للطرق الأخرى، ولكنها تفشل في أن تلقي الأضواء على بعض المفاهيم والحقائق التي تعرضها الطرق الأخرى. ولذلك فإننا سنهاجم المسألة بطريقة مختلفة.

إذا كانت A و B متشـابهتين فلهما الصيغة القانونية القياسية R نفسها وصيغة جوردان القانونية J نفسها. وإذا استطعنا عندئذ إيجاد مصفوفتين غير شاذتين S و T

بحيث يكون

$$S^{-1}AS = J, \quad T^{-1}BT = J,$$

أو بحيث يكون

$$S^{-1}AS = R, \quad T^{-1}BT = R,$$

فنجد عندئذ بوضوح أن

$$P^{-1}AP = B,$$

حيث $P = ST^{-1}$. ومسألة إيجاد P تختزل إذن إلى إيجاد S بحيث تكون $S^{-1}AS$ صيغة قانونية.

وقبل المضي في اختزال A إلى صيغة قانونية، سنبرهن التمهيدية المهمة التالية:

تمهيدية (٨٤ ـ ١)

إذا رمزنا بـ $V_1, V_2, \ldots, V_n$ لِـ n من المتّجهات المستقلة خطّيًا التي تمثّل أعمدة المصفوفة غير الشاذة P ، وإذا كان $A V_j = b_{1j} V_1 + b_{2j} V_2 + \ldots + b_{nj} V_n$ ، فعندئذ يكون المتّجه العمود $[b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}]$ هو، بالضبط، المتّجه العمود j للمصفوفة $P^{-1}AP$.

نلاحظ قبل كل شيء، وباعتبار أن P غير شاذة بالفرض، أن الـ n متّجه V_j مستقلة خطّيًا بحيث يمكن التعبير عن المتّجه AV_j ، وهو المتّجه العمود في العمود j من المصفوفة AP ، على الشكل المعروض في التمهيدية. وإذا رمزنا الآن بـ W_i للمتّجه الصف الذي يمثل الصف i من P^{-1} ، فلدينا من النظريتين (٧ ـ ٨) و(٧ ـ ١١)،

$$W_i . V_j = \delta_{ij},$$

حيث الطرف الأيسر هو الجداء الداخلي للمتّجهين W_i ، V_j وδ_{ij} هو رمز كرونكر. ونستنتج عندئذ أن

$$W_i A V_j = b_{ij},$$

وهو المطلوب.

٨٥ ـ سلسلة من المتّجهات

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathscr{F}$ ، لتكن $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ مصفوفة $n \times 1$ أو متّجهًا عمودًا ذا n بعد فوق $\mathscr{F}$ ، ولنعتبر سلسلة المتّجهات

$$X, AX, \ldots, A^{\alpha-1} X,$$

حيث X هو القائد. لنفرض أن هذه الـ α من المتّجهات مستقلة خطّيًا، وأنه يمكن التعبير عن $A^{\alpha}X$ كتركيب خطّي فيها، أي لنفرض أن

$$A^{\alpha} X = a_1 A^{\alpha-1} X + a_2 A^{\alpha-2} X + \ldots + a_{\alpha-1} AX + a_{\alpha} X,$$

حيث تنتمي المعاملات a إلى $\mathscr{F}$. إذا رمزنا بـ $\theta(\lambda)$ لكثيرة الحدود

$$\theta(\lambda) = \lambda^{\alpha} - a_1 \lambda^{\alpha-1} - a_2 \lambda^{\alpha-2} - \ldots - a_{\alpha},$$

فعندئذ $\theta(A) X = 0$. ويُقال عندئذ إن كثيرة الحدود $\theta(A)$ تُفني المتّجه X ، ومن الواضح أنه لا توجد كثيرة حدود من درجة أدنى تمتلك هذه الخاصة. وستدعى $\theta(A)$ الدالّة المميَّزة المختزلة لـ X بالنسبة إلى المصفوفة A ، وسنقول إن X ينتمي إلى كثيرة الحدود $\theta(\lambda)$. ونوافق هنا دائمًا على أخذ $\theta(\lambda)$ ككثيرة حدود واحديّة، أي كثيرة حدود معامل الحد الرئيس فيها هو الواحد. ويمكننا الآن برهان النظرية التالية :

نظرية (٨٥ ـ ١)

بالنسبة لمصفوفة معطاة A ، تكون الدالّة المميَّزة المختزلة $\theta(\lambda)$ لمتّجه X وحيدة، وفضلًا عن ذلك، إذا كانت $\psi(\lambda)$ أية كثيرة حدود بحيث إن $\psi(A) X = 0$ ، فعندئذ يكون $\theta(\lambda)$ من عوامل $\psi(\lambda)$.

نبرهن أولًا الجزء الثاني من النظرية. فبما أن $\theta(\lambda)$ كثيرة حدود واحدية وذات الدرجة الأدنى من بين كثيرات الحدود التي تحقّق $\theta(A) X = 0$ ، وباعتبار أن $\psi(A) X = 0$ فمن الواضح أن درجة $\psi(\lambda)$ لا يمكن أن تكون أقل من درجة $\theta(\lambda)$. لنقسّم $\psi(\lambda)$ على $\theta(\lambda)$ ولنكتب

$$\psi(\lambda) = q(\lambda)\, \theta(\lambda) + \rho(\lambda),$$

حيث $\rho(\lambda) = 0$ أو من درجة أقل من درجة $\theta(\lambda)$. فلدينا عندئذ

$$\psi(A)X = q(A)\,\theta(A)X + \rho(A)X,$$

ومنه، وباعتبار أن $\psi(A)X = 0$ ، $\theta(A)X = 0$ ، فلدينا $\rho(A)X = 0$ ، وإذا كان $\rho(\lambda) \neq 0$ ، فإن هذا يناقض الفرض بأن $\theta(\lambda)$ كثيرة الحدود ذات الدرجة الأدنى التي تجعل $\theta(A)X = 0$. ومنه $\rho(\lambda) = 0$ و $\psi(\lambda)$ تقبل القسمة على $\theta(\lambda)$.

والآن إذا كانت $\theta(\lambda)$ و $\theta_1(\lambda)$ كثيرتي حدود، وكانت كل منهما واحدية ومن الدرجة الدنيا التي تجعل $\theta(A)X = 0$ و $\theta_1(A)X = 0$ ، فعندئذ، ووفقاً للنتيجة السابقة تكون كل من كثيرتيّ الحدود عاملاً من عوامل الأخرى، وبما أن كلاًّ منهما واحديّة بالفرض فلا بدَّ أن تكونا متطابقتين.

والآن إذا كانت $\phi(\lambda)$ هي الدالَّة المميَّزة المختزلة لِـ A . فلدينا $\phi(A) = 0$ ، بحيث إنه من أي متّجه X يكون $\phi(A)X = 0$. وهكذا نجد النتيجة :

النتيجة (٨٥ ـ ٢)

إذا كانت $\phi(\lambda)$ الدالَّة المميَّزة المختزلة لمصفوفة A ، فإن كثيرة الحدود $\theta(\lambda)$ ، التي ينتمي إليها أي متّجه X بالنسبة إلى A ، هي عامل من عوامل $\phi(\lambda)$.

والجوهري بالنسبة لأغراضنا هنا هو النظرية التالية :

نظرية (٨٥ ـ ٣)

إذا كانت $\phi(\lambda)$ الدالَّة المميَّزة المختزلة لمصفوفة A بعناصر في حقل $\mathscr{F}$ ، فيمكننا دائماً إيجاد متّجهات X ، عناصرها في $\mathscr{F}$ ، وتنتمي إلى $\phi(\lambda)$.

لبرهان هذه النظرية، لتكن $\phi(\lambda)$ ، عند تحليلها إلى جداء قوى لعوامل أوّلية في $\mathscr{F}$ ، على الشكل

$$\phi(\lambda) = p_1^{q_1}\,p_2^{q_2} \ldots p_s^{q_s} \qquad [q_i \geqslant 1;\ i = 1, 2, \ldots, s]$$

حيث العوامل p هي كثيرات حدود مختلفة في λ وغير قابلة لمزيد من الاختزال في $\mathscr{F}$.

لنكتب الآن

$$\phi(\lambda) = p_1^{q_1}\pi_1 = p_2^{q_2}\pi_2 = \ldots = p_s^{q_s}\pi_s.$$

والمصفوفة $p_i^{q_i - 1}(A)\,\pi_i(A)$ ليست صفرًا بالتأكيد باعتبار أن $\phi(\lambda)$ هي الدالة المميِّزة المختزلة لِـ A . إذا لم يكن العمود j من هذه المصفوفة مؤلَّفًا بكامله من الأصفار، وكان e_j العمود الواحدي الذي يحوي 1 في الموضع j وأصفارًا فيما عدا ذلك أي :

$$e_j = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0],$$

فعندئذ

$$p_i^{q_i - 1}(A)\,\pi_i(A)\,e_j \neq 0.$$

وإذا وضعنا

$$Z_i = \pi_i(A)\,e_j,$$

فعندئذ $p_i^{q_i - 1}(A)\,Z_i \neq 0$ ، بينما $p_i^{q_i}(A)\,Z_i = \phi(A)\,e_i = 0$. ومنه، تنتمي Z_i إلى كثيرة الحدود $p_i^{q_i}$ وفضلاً عن ذلك فإن مركّباتها هي عناصر من الحقل $\mathscr{F}$.

ويُبرهن بسهولة على أن المتّجه

$$X = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_s$$

ينتمي إلى كثيرة الحدود $\phi(\lambda)$. ذلك لأنه إذا كانت X تنتمي إلى $\psi(\lambda)$ بحيث إن

$$0 = \psi(A)\,X = \Sigma\ \psi(A)\,Z_i$$

وبما أن π_i تقبل القسمة على $p_j^{q_j}$ من أجل $i \neq j$ ، فلدينا بعد الضرب في $\pi_i(A)$ من اليسار:

$$0 = \psi(A)\,\pi_i(A)\,Z_i$$

ومنه نستنتج أن $\psi(\lambda)\,\pi_i(\lambda)$ تقبل القسمة على $p_i^{q_i}$ ، وبما أن هذا الأخير أولي بالنسبة إلى π_i فنستنتج أن ψ يجب أن يقبل القسمة على $p_i^{q_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ وبالتالي فإنه يقبل القسمة على جدائها $\phi(\lambda)$. أي أن $\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$ ، وهو المطلوب.

وفي التطبيق العملي، عندما يكون n صغيرًا يمكن في كثير من الحالات إيجاد متّجه X ينتمي إلى $\phi(\lambda)$ بطريقة التجربة والخطأ.

٨٦ ـ الاختزال إلى الصيغة القانونيّة القياسيّة

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathscr{F}$ ، ولتكن الدالة المميزة المختزلة لِـ A :

$$\phi(\lambda) = \lambda^{\alpha} - a_1 \lambda^{\alpha-1} - a_2 \lambda^{\alpha-2} - \ldots - a_{\alpha} \quad (\alpha \leqslant n). \tag{86.1}$$

لتكن X_1 متّجهًا عمودًا فوق $\mathcal{F}$. ينتمي إلى كثيرة الحدود $\phi(\lambda)$. فالمتّجهات :

$$X_1, AX_1, \ldots, A^{\alpha-1} X_1, \tag{86.2}$$

مستقلة خطِّيًّا، بينما

$$A^{\alpha} X_1 = a_1 A^{\alpha-1} X_1 + a_2 A^{\alpha-2} X_1 + \ldots + a_{\alpha} X_1. \tag{86.3}$$

وتشكّل المتّجهات في (86.2) أساسًا لفضاء متّجهي خطّي Γ_1 ذي α بعد، وهو فضاء جزئي لا متغير بالنسبة لِـ A .

إذا كان $\alpha = n$ فالمتّجهات

$$V_1 = X_1, V_2 = AX_1, \ldots, V_n = A^{n-1} X_1, \tag{86.4}$$

تشكّل أساسًا لكامل الفضاء ذي الـ n بعدًا. وبما أنه لدينا من (86.2) و (86.3) :

$$AV_i = V_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$AV_n = a_n V_1 + a_{n-1} V_2 + \ldots + a_1 V_n,$$

فنستنتج من التمهيدية (٨٤ ـ ١) أنه إذا كانت المتّجهات V_i في (86.4) مأخوذة كأعمدة في مصفوفة P مربّعة $n \times n$ ، فعندئذ

$$P^{-1}AP = R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{bmatrix}. \tag{86.5}$$

وهذه هي إحدى الصيغ القانونيّة القياسيّة R لمصفوفة A دالّتها المميَّزة المختزلة في (86.1) من الدرجة n .

إذا كان $\alpha < n$ ، فيمكننا إيجاد متّجه Y مستقل خطِّيًّا عن المتّجهات (86.4) . لنفرض أن المجموعة من $\alpha + \beta$ من المتّجهات المؤلفة من المتّجهات في (86.4) والمتّجهات

$$Y, AY, A^2Y, \ldots, A^{\beta-1} Y$$

مستقلّة خطِّيًّا، ولكن يمكن التعبير عن $A^{\beta}Y$ كتركيب خطِّي فيها. أي أن $A^{\beta} Y$ هو أوّل

متّجه في المتسلسلة الأخيرة غير مستقل خطّيًا عن المتّجهات (86.4) وعن المتّجهات التي تسبقه في المتسلسلة. وهكذا نجد علاقة من الشكل

$$\theta_1 (A)\, X_1 + \theta_2 (A)\, Y = 0 \tag{86.6}$$

حيث θ_1 و θ_2 كثيرتا حدود سلّميتان فوق$\mathscr{F}$ ، درجة الأخيرة β ، والسابقة، إذا لم تكن صفرًا، فمن الدرجة $\alpha - 1$ على الأكثر. وفضلاً عن ذلك فإنه لا توجد أية كثيرة حدود سلّمية θ_2 من درجة أقل من β وتحقّق علاقة من النوع (86.6). لتكن $\phi_2 (\lambda)$ الدالة المميّزة المختزلة لـ Y . فعندئذ وباعتبار أن

$$\phi_2 (A)\, Y = 0 \tag{86.7}$$

هي علاقة من النوع (86.6) ، فمن الواضح أن درجة θ_2 لا يمكنها أن تتجاوز درجة ϕ_2. لنقسم ϕ_2 على θ_2 ونكتب

$$\phi_2 = q_2\, \theta_2 + \rho_2, \tag{86.8}$$

حيث إن ρ_2 إما صفر أو من درجة أقل من β . وإذا ضربنا الآن طرفي (86.6) في $q_2 (A)$ واستفدنا من (86.7) و (86.8) نحصل على

$$\rho_2 (A)\, Y - q_2 (A)\, \theta_1 (A)\, X_1 = 0$$

وبما أن ρ_2 ، إذا لم تكن صفرًا، من درجة أصغر من β ، فنستنتج أن $\rho_2 = 0$ بحيث تكون θ_2 من عوامل ϕ_2. وبما أن ϕ هي الدالة المميّزة المختزلة لـ X_1 فإن $q_2 (\lambda)\, \theta_1 (m)$ قابل للقسمة، وفقًا للنتيجة (٨٥ ـ ٢)، على ϕ . وفضلاً عن ذلك، وباعتبار ϕ هي الدالّة المميّزة المختزلة لـ A ، فإن ϕ يقبل القسمة على $\phi_2 = q_2\, \theta_2$. ومنه $q_2\, \theta_1$ يقبل القسمة على $q_2\, \theta_2$ بحيث إن θ_1 يقبل القسمة على θ_2. وإذا وضعنا $\theta_1 = \psi\, \theta_2$ ، فلدينا من (86.6)

$$\theta_2 (A) \left[Y - \psi (A)\, X_1 \right] = 0$$

وإذا وضعنا

$$X_2 = Y - \psi (A)\, X_1,$$

فمن السهل أن نرى أن للمتّجه X_2 دالّة مميّزة مختزلة هي θ_2 وأن المجموعة من $\alpha + \beta$ من المتّجهات والمؤلّفة من الـ α متّجهًا في (86.4) والـ β متّجهًا:

$$X_2, AX_2, \dots, A^{\beta-1} X_2, \tag{86.9}$$

هي مجموعة مستقلّة خطّيًا.

وإذا كان $\alpha + \beta = n$ فإن المتّجهات (86.4) و (86.9) تشكّل أساسًا للفضاء المتّجهي ذي الـ n بعدًا بكامله. وإذا اعتبرنا هذه المتّجهات أعمدة لمصفوفة P غير شاذة، فعندئذ وكما رأينا أعلاه تمامًا

$$R = P^{-1} AP \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}$$

حيث R_1 هي المصفوفة في (86.5) وحيث $\alpha = n$ و R_2 مصفوفة مربّعة من المرتبة β، من النوع نفسه كَـ R_1 ولكن العمود الأخير فيها مؤلّف من العناصر $b_\beta, b_{\beta-1}, \dots, b_1$. وفي هذه الحالة تكون R الصيغة المختزلة القياسية مما يُتمِّم الاختصار المطلوب.

لنفرض، على أي حال، أن $\alpha + \beta < n$. فنجد عندئذ متّجهًا Z مستقلاً خطيًا عن الـ $\alpha + \beta$ متّجهًا في (86.4) و (86.9). ونشكّل المتابعة

$$A, AZ, \dots, A^{\gamma-1} Z, \tag{86.10}$$

ونفرض هنا أنّ الـ $\alpha + \beta + \gamma$ متّجه في (86.4)، (86.9) و (86.10) مستقلة خطّيًا ولكن المجموعة التي نحصل عليها بضم $A^\gamma Z$ هي مجموعة غير مستقلة خطّيًا. ولدينا عندئذ علاقة من الشكل:

$$\theta_3 Z = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2, \tag{86.11}$$

حيث θ_3 كثيرة حدود سلّمية من الدرجة γ وهي ذات الدرجة الأقل من بين كثيرات الحدود التي تصحّ معها علاقة من النوع (86.11). لتكن ϕ_3 الدالّة المميّزة المختزلة لِـ Z. وتمامًا كما سبق آنفًا نبيّن بسهولة أن ϕ_3 تقبل القسمة على θ_3. وإذا كان $\phi_3 = q\,\theta_3$، فلدينا بعد ضرب طرفي (86.11) بِـ $q(A)$:

$$0 = \phi_3 Z = q\,\theta_3 Z = q\,\theta_1 X_1 + q\,\theta_2 X_2.$$

ولكن من الطريقة التي اختير فيها X_2، يمكن أن تصحّ علاقة من هذا النوع الأخير فقط إذا كان كل من الحدَّين في الطرف الأيمن مساويًا للصفر على حدة. ومن $q\,\theta_1 X_1 = 0$ نستنتج أن $q\,\theta_1$ تقبل القسمة على ϕ وبالتالي على $\phi_3 = q\,\theta_3$ بحيث تقبل θ_1 القسمة على θ_3. وإذا وضعنا $\theta_1 = \psi\,\theta_3$ فلدينا من (86.11)

$$\theta_3 (Z - \psi X_1) = \theta_2 X_2.$$

نضع الآن $X_3 = Z - \psi X_1$ ونشكّل المتتابعة

$$X_3, AX_3, A^2X_3, \ldots, A^{\gamma-1}X_3. \tag{86.12}$$

وبما أن $\theta_3 X_3 = \theta_2 X_2$ ، وأن هذه العلاقة الأخيرة لا تصحُّ من أجل أية كثيرة حدود θ_3 من درجـة أدنى من γ فنستنتج أن المجموعة من $\alpha + \beta + \gamma$ من المتّجهات في (86.4) ، (86.9) و (86.12) مستقلة خطيًّا، بينما يمكن التعبير عن $A^\gamma X_3$ كتركيب خطّي في المتّجهات (86.9) و (86.12) ، ولكن هذا التركيب لا يحوي إطلاقًا X_1 .

وإذا كان $\alpha + \beta + \gamma = n$ فنأخذ الـ n متجهًا تحت الاعتبار كأعمدة P ويكون $P^{-1}AP$ من الشكل

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}. \tag{86.13}$$

أما إذا كان $\alpha + \beta + \gamma < n$ ، فنستمر في العملية حتى نجد P بحيث يكون $P^{-1}AP$ من الشكل المبينً في (86.13). ثم نطبِّق على A_1 العملية نفسها حتى نختصر A في النهاية إلى الصيغة القانونيّة القياسيّة

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_s \end{bmatrix}. \tag{86.14}$$

توضيح ١ : إذا كانت A هي المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

فنجد بحسابات بسيطة أن الدالّة المميَّزة المختزلة هي $\phi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. ونرى عندئذ بالتجـربـة والخطأ أن المتّجه $X = [1, 0, 0,]$ ينتمي إلى كثيرة الحدود $\phi(\lambda)$ ، ونشكّل

المتسلسلة

$$X_1 = [1, 0, 0,], \quad AX_1 = [0, 1, 1], \quad A^2X_1 = [2, 1, 1] = (A + 2I)\, X_1.$$

وهكذا يشكّل المتّجهان X_1 و AX_1 الأساس لفضاء جزئي لا متغير Γ_1 ذي بعدين.

ونرى بالتجربة أن المتّجه $Y = [0, 0, 1]$ مستقل خطيًّا عن المتّجهين AX_1 ، X_1 . وعند تشكيل المتسلسلة متخذين Y كقائد، نجد أن

$$AY = [1, 1, 0] = AX_1 + X_1 - Y,$$

أو

$$(A + I)\, Y = (A + I)\, X_1,$$

ومنه

$$(A + I)\,(Y - X_1) = 0.$$

وينتمي المتّجه $V_3 = Y - X_1$ عندئذ إلى كثيرة الحدود $\lambda + 1$ ، ويولّد فضاءً جزئيًّا لا متغيراً Γ_2 ذا بعد واحد، وليس له أيّ متّجه مشترك مع الفضاء الجزئي Γ_1 . وإذا اخترنا الآن المتّجهات الثلاثة

$$V_1 = X_1, \quad V_2 = AX_1, \quad V_3 = Y - X_1.$$

كأعمدة للمصفوفة غير الشاذة P . فعندئذ $P^{-1}AP$ هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

وهي الصيغة القانونيّة القياسيّة لـ A .

توضيح ٢ : لنأخذ كتوضيح ٍ ثانٍ المصفوفة(*)

(*) انظر: M. F. Smiley, "The Rational Canonical Form of a Matrix " *Armerican Mathematical Monthly*, Vol. 49, 1942, pp. 451-454.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

التي دالَّتها المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2$.

لنأخذ $X = [1, 0, 0, 0]$ فنجد أن $AX = [-1, 1, 0, 0]$ ، $A^2X = [1, 1, 3, 5]$ و$A^3X = [-1, 6, 4, 9]$. ونجد أن هذه المتّجهات الأربعة مستقلة خطّيًّا بينما $A^4X = [1, 15, 17, 33] = 2A^3X + 3A^2X$. وإذا أخذنا الآن المتّجهات

$$V_1 = X, \quad V_2 = AX, \quad V_3 = A^2X, \quad V_4 = A^3X,$$

كأعمدة للمصفوفة غير الشاذة P ، فعندئذ تكون $P^{-1}AP$ هي المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

٨٧ ـ صيغة جوردان القانونيّة

نمضي الآن إلى اشتقاق الصيغة القانونيّة الكلاسيكيّة أو صيغة جوردان القانونيّة لِـ A . ولهذه الغاية يمكن الفرض بأن A غير متردِّية، ذلك لأنه في الحالة المعاكسة يمكننا أولاً اختصار A إلى الصيغة القانونيّة القياسيّة (86.14) التي يكون كل قالب فيها R_i غير متردٍّ. وعندئذ نحتاج فقط إلى اختصار كل R_i على حدة.

نفرض الآن أن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ دالَّتها المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda)$ من الدرجة n . ونفرض أن عناصر A تقع في حقل الأعداد المركبة $\mathscr{F}$ ، بحيث يمكن تحليل $\phi(\lambda)$ في $\mathscr{F}$ إلى جداء قوى عوامل خطّية متميِّزة. أي أن

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{q_1}(\lambda - \alpha_2)^{q_2} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{q_s} \qquad (\sum q_i = n). \tag{78.1}$$
$$= (\lambda - \alpha_1)^{q_1}\pi_1(\lambda) = (\lambda - \alpha_2)^{q_2}\pi_2(\lambda) = \cdots = (\lambda - \alpha_s)^{q_s}\pi_s(\lambda).$$

وتمامًا كما في الفقرة ٨٥ يمكن إيجاد متّجه Z_j ينتمي إلى كثيرة الحدود $(\lambda - \alpha_j)^{q_1}$. ولنكتب عندئذ:

$$V_i^{(j)} = (A - \alpha_j I)^{q_j - i} Z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, q_j; j = 1, 2, \ldots, s). \tag{87.2}$$

ولدينا هنا n من المتّجهات. وهذه المتّجهات مستقلة خطّيًا. ذلك لأنها إذا كانت غير مستقلة خطّيًا فقد توجد علاقة من الشكل

$$\sum_{j=1}^{s} g_j(A) Z_j = 0 \tag{87.3}$$

حيث $g_j(\lambda)$ كثيرة حدود من درجة أقل من q_j. وبما أن $\pi_i(\lambda)$ تقبل القسمة على $(\lambda - \alpha_i)^{q_j}$ $(i \neq j)$ فلدينا بعد ضرب طرفي (87.3) من اليسار في $\pi_i(A)$:

$$\pi_i(A) g_i(A) Z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

ونستنتج من هذا أن $\pi_i(\lambda) g_i(\lambda)$ قابل للقسمة على $(\lambda - \alpha_i)^{q_i}$. ولكن هذا مستحيل باعتبار أن $\pi_i(\lambda)$ أولية بالنسبة لـ $(\lambda - \alpha_i)^{q_i}$ بينما $g_i(\lambda)$ من درجة أقل من $(\lambda - \alpha_i)^{q_i}$.

وبما أن

$$A V_i^{(j)} = [(A - \alpha_j I) + \alpha_j I] V_i^{(j)} = (A - \alpha_j I)^{q_j - i + 1} Z_j + \alpha_j V_i^{(j)},$$

فلدينا

$$A V_i^{(j)} = V_{i-1}^{(j)} + \alpha_j V_i^{(j)} \quad (i = 2, 3, \ldots, q_j; j = 1, 2, \ldots, s).$$

بينما

$$A V_1^{(j)} = (A - \alpha_j I)^{q_j} Z_j + \alpha_j V_1^{(j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

ومنه إذا أخذنا هذه المتّجهات الـ n كأعمدة لمصفوفة غير شاذة T، فعندئذ ستفترض $T^{-1}AT$ الشكل

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix},$$

حيث J_i هي المصفوفة المربّعة $q_i \times q_i$

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_i \end{bmatrix}.$$

وهو ما يسمى الصيغة القانونيّة الكلاسيكيّة أو صيغة جوردان القانونيّة لِـ A .

توضيح ٣ : اختصر المصفوفة التالية إلى صيغة جوردان القانونيّة .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

الدالَّة المميَّزة المختزلة $\phi(\lambda)$ لِـ A هي $(\lambda - 1)^3$ ، ومنه A غير متردِّية . وسوف لا يكون ضروريًا أن نختصر A إلى صيغة قانونيّة قياسيّة . فبالتجربة نجد أن المتّجه $X = [1, 0, 0]$ ينتمي إلى كثيرة الحدود $\phi(\lambda)$. وبحسابات بسيطة نجد أن

$$V_1 = (A - I)^2 X = [0, 3, 3], \quad V_2 = (A - I) X = [1, 2, 1], \quad V_3 = X = [1, 0, 0].$$

وإذا أخذنا هذه المتّجهات الثلاثة كأعمدة لمصفوفة T فعندئذ

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

وهذه هي صيغة جوردان القانونيّة لِـ A .

وكتوضيح أخير نختصر إلى صيغة جوردان القانونية المصفوفة 4×4 غير المتردية المذكورة في التوضيح ٢ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

ونجد بالتجربة أنّ المتّجهات

$$Z_1 = [0, 0, 1, 4], \quad Z_2 = [0, 1, 1, 2], \quad Z_3 = [4, -3, 5, 6]$$

تنتمي إلى العوامل $\lambda^2, \lambda - 3, \lambda + 1$ على الترتيب، وهي عوامل الدالَّة المميَّزة المختزلة،

والمتّجهان الأخيران من متّجهات A اللامتغيرة بحيث إن $AZ_2 = 3Z_2$ و $AZ_3 = -Z_3$. لنأخذ

$$V_1 = AZ_1 = [0, 1, -2, -1], \quad V_2 = Z_1, \quad V_3 = Z_2, \quad V_4 = Z_3.$$

ولنستخدم المتّجهات V الأربعة كأعمدة لمصفوفة T . بما أن $AV_1 = A^2Z_1 = 0$ ، $AV_2 = V_1$ فتكون $T^{-1}AT$ صيغة جوردان القانونية J لِـ A ، حيث

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

تماريـن

من أجل كل من المصفوفات التالية A ، أوجد مصفوفتين غير شاذتين P و T بحيث يكون $P^{-1}AP = R$ و $T^{-1}AT = J$ ، على الترتيب، الصيغة القانونيّة القياسيّة وصيغة جوردان القانونيّة لِـ A .

١) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

٢) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

٤) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

٥) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

٦) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

٨) $\begin{bmatrix} -2 & 10 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -15 & -3 \end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

١٠) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

١١) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

١٢) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

١٣) $\begin{bmatrix} 2 & -7 & -8 \\ -3 & 6 & 8 \\ 3 & -7 & -9 \end{bmatrix}$

١٤) $\begin{bmatrix} -4 & 1 & -3 \\ -18 & 5 & -9 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

١٥) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

١٦) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

١٧) $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ -8 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

١٨) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

١٩) بيِّن أنه إذا كان $n = \alpha$ في (86.2) وأخذنا

$$V_1 = A^{n-1}X, V_2 = A^{n-2}X, \ldots, V_{n-1} = AX, V_n = X$$

كالأعمدة: الأول، الثاني، . . . ، الـ n من P ، فعندئذ $P^{-1}AP$ هي الصيغة القانونيّة

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٢٠) بيِّن أنه يمكن الحصول على الصيغة القانونية في التمرين السابق بتطبيق التحويل $S^{-1}RS$ على R المذكورة في (86.5) ، حيث

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

٢١) بما أن للمصفوفتين $A - \lambda I$ و $A' - \lambda I$ العوامل اللامتغيرة نفسها، فيكون لـ A و A' الصيغتان القانونيتان نفساهما. والآن إذا كانت Q بحيث إن $Q^{-1}A'Q = R$ في (86.5) فلدينا $Q'A\,(Q')^{-1} = R'$ ، حيث R' هي مدوّر المصفوفة في (86.5).

٢٢) لتكن S مصفوفة غير شاذة بحيث إن $SAS^{-1} = B$. إذا كانت $U_1, U_2, \ldots, U_n$ متّجهات الصفوف المتتالية لـ S وكان $U_iA = b_{i1}U_1 + b_{i2}U_2 + \ldots + b_{in}U_n$. فتكون عندئذ عناصر الصف i من B هي بدقة $b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in}$.

٢٣) إذا كانت R' مدوّر R في (86.5) وكان V المتّجه $[0, 0, \ldots, 0, 1]$ فبيِّن أن المتّجهات الـ n : $V, R'V, R'^2V, \ldots, (R')^{n-1}V$ مستقلة خطِّيًا. وإذا أخذنا هذه المتّجهات كأعمدة لمصفوفة مربّعة T فعندئذ $T^{-1}R'T = R$.

الفصل الثامن عشر

تكافؤ

أزواج الصيغ

٨٨ - أزواج الصيَغ ثنائية الخطِّية

لنعتبر الزوجين من الصيغ ثنائية الخطِّية

$$\begin{aligned} a(x, u) &= \sum a_{ij} x_i u_j, \quad b(x, u) = \sum b_{ij} x_i u_j, \\ c(y, v) &= \sum c_{ij} y_i v_j, \quad d(y, v) = \sum d_{ij} y_i v_j, \end{aligned} \tag{88.1}$$

حيث الـــزوج الأول في مجمـــوعتـــين من n من المـتـغـــيرات هما $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ و $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، والـزوج الآخـر في المجمـوعتـين من المتغيرات $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. وكما في الفقرة ٣٧ إذا تركنا X, Y, U, V ترمز لمتّجهات عمود كل منها ذي n بُعدٍ مثلاً

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

فيمكن تمثيل الصيغ ثنائية الخطِّية في (88.1) كمصفوفات 1×1 :

$$\begin{aligned} a(x, u) &= X'AU, \quad b(x, u) = X'BU, \\ c(y, v) &= Y'CV, \quad d(y, v) = Y'DV. \end{aligned} \tag{88.2}$$

وندعو عندئذ المصفوفات المربعة A, B, C, D مصفوفات الصيغ . وسنفرض أن عناصر هذه المصفوفات جميعها في حقل أعداد $\mathscr{F}$.

ونفرض أولاً أن المصفوفتين A و C غير شاذتين، ونتساءل عن الشروط التي يمكن معها إيجاد تحويلات غير شاذة بالنسبة للمتغيرات x والمتغيرات u .

$$X = PY \text{ و } U = QV \tag{88.3}$$

بحيث تتحول، بالوقت نفسه، $a(x, u)$ إلى $c(y, v)$ و $b(x, u)$ إلى $d(y, v)$.

وإذا طبّقنا على المتغيّرات في $a\,(x, u)$ و $b\,(x, u)$ في (88.2) التحويلات (88.3)، وفقًا للنظرية (٣٧ ـ ١) تكون الصيغتان الجديدتان $P'AQ$ و $P'BQ$، على الترتيب.
وستكون الصيغتان الجديدتان هما $c\,(y, v)$ و $d\,(y, v)$، إذا، وفقط إذا، كان

$$P'AQ = C \text{ و } P'BQ = D.$$

ووفقًا للنظرية (٥٨ ـ ١) يكون الشرط اللازم والكافي لوجود زوج من المصفوفات غير الشاذة P و Q تحقّقان هذا الشرط الأخير هو أن يكون للمصفوفتين

$$\lambda A + B \text{ و } \lambda C + D$$

القواسم الابتدائية نفسها، أو إذا فضّلنا، العوامل اللامتغيرة نفسها.

ولنلاحظ عند هذه النقطة أنه إذا كان للمصفوفتين $\lambda A + B$، $\lambda C + D$ القواسم الابتدائية نفسها وكانت A غير شاذة، فعندئذ تكون C أيضًا غير شاذة، ذلك لأن جداء القواسم الابتدائية في الحالتين المتتاليتين هما (باستثناء عامل لا يساوي الصفر) $|\lambda B + A|$ و $|\lambda C + D|$، ومعامل λ^n في نشر المحدّد في الحالتين هو على الترتيب $|A|$ و $|C|$.

ويمكننا إذن عرض النظرية:

نظرية (٨٨ ـ ١)

ليكن $a\,(x, u) = X'AU$، $b\,(x, u) = X'BU$ و $c\,(y, v) = Y'CV$، $d\,(y, v) = Y'DV$ زوجين من الصيغ ثنائية الخطّية في مجموعتين من n من المتغيرات. إذا كانت A غير شاذة فإن الشرط اللازم والكافي لوجود تحويلين خطّيين غير شاذين $X = PY$ و $U = QV$ تحوّل $a\,(x, u)$ إلى $c\,(y, v)$ وفي الوقت نفسه تحوّل $b\,(x, u)$ إلى $d\,(y, v)$ هو أن يكون للمصفوفتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ القواسم الابتدائية نفسها، أو إذا فضّلنا، العوامل اللامتغيرة نفسها.

٨٩ ـ تغيير الأساس

إذا كانت A و B مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل $\mathscr{F}$، وكان λ متغيرًا سلّميًا فوق $\mathscr{F}$، فسنشير إلى $\lambda A + B$ كحزمة من المصفوفات. وحتى الآن فرضنا أن

A مصفوفة غير شاذة. وسنزيل الآن هذا القيد، ولكن سنبقى نفترض أن المحدّد $|\lambda A + B|$ لا يطابق الصفر فوق جميع قيم λ. أي أن رتبة المصفوفة $\lambda A + B$ هي n. وستدعى هذه الحالة الحالة غير الشاذة، وسنشير إلى الحالة التي يكون فيها $|\lambda A + B| = 0$ كحالة شاذة.

وفي الحالة غير الشاذة، توجد قيمة لـ λ ولنقل $\lambda = k$ بحيث تكون $kA + B$ غير شاذة. أي أن الحزمة $\lambda A + B$ تحوي أعضاء ليست شاذة. وسنجد من المناسب إدخال وسيطين متجانسين λ, μ وكتابة $\lambda A + \mu B$ بدلاً من $\lambda A + B$. ومصطلح «العامل اللامتغير» و«القاسم الابتدائي» سيحتاجان، عند تطبيقهما على $\lambda A + \mu B$ إلى قليل من التوضيح.

لنفترض أن المحدّد $d_n(\lambda, \mu) = |\lambda A + \mu B|$ لا يطابق الصفر فوق قيم λ و μ. إذن من الواضح أن $d_n(\lambda, \mu)$ صيغة ثنائية درجتها n في λ و μ. وفضلاً عن ذلك، إما أن يكون كل محدّد مصغر مرتبته m $(m \leqslant n)$ من *المصفوفة* $\lambda A + \mu B$ مطابقًا للصفر أو أنه صيغة من الدرجة m. إذا رمزنا بـ $d_m(\lambda, \mu)$ للقاسم المشترك الأعظم لجميع المحدَّدات الصغرى ذات الـ m صفًّا من $\lambda A + \mu B$، فمن الواضح أن $d_m(\lambda, \mu)$ هو صيغة ثنائية الخطِّية في λ و μ، ويقبل القسمة بوضوح على $d_{m-1}(\lambda, \mu)$. وإذا أخذنا $d_0(\lambda, \mu) = 1$، فحواصل القسمة:

$$e_m(\lambda, \mu) = \frac{d_m(\lambda, \mu)}{d_{m-1}(\lambda, \mu)} \qquad (m = 1, 2, \cdots, n) \qquad (89.1)$$

إما أن تكون أعدادًا ثابتة (والتي سنعتبرها مساوية للواحد) أو صيغًا ثنائية الخطِّية في λ و μ. وسندعو هذه المقادير e بالعوامل اللامتغيرة للمصفوفة $\lambda A + \mu B$.

وإذا حلَّلنا الآن مثل هذه المقادير e، التي هي غير الواحد، إلى جداء قوى عوامل خطِّية متميِّزة، فتدعى قوى مثل هذه الصيغ الخطِّية بالقواسم الابتدائية للمصفوفة $\lambda A + \mu B$.

ونبرهن الآن التمهيدية التالية:

تمهيدية (٨٩ - ١)

لنرمز بـ A و B لمصفوفتين مربّعتين $n \times n$ عناصرهما في حقل $\mathcal{F}$، بحيث لا يتطابق المحدّد $|\lambda A + \mu B|$ مع الصفر فوق قيم λ و μ. إذا كان

$$M = \alpha A + \beta B, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{89.2}$$
$$N = \gamma A + \delta B$$

بحيث إن $\sigma M + \tau N = \lambda A + \mu B$ ، وحيث

$$\lambda = \alpha\sigma + \gamma\tau$$
$$\mu = \beta\sigma + \delta\tau, \tag{89.3}$$

فعندئذ تكون القواسم الابتدائية لـ $\sigma M + \tau N$ مشتقة من تلك الموافقة لـ $\lambda A + \mu B$ بوساطة التحويلات (89.3).

لبرهان هذه التمهيدية لنفرض أن $\lambda a + \mu b$ قاسم لجميع المحدَّدات المصغَّرة ذات الـ m صفًّا من $\lambda A + \mu B$ ، وأن ν هو الأس لأعلى قوة في هذا العامل الخطِّي الذي تقبل جميع هذه المحدَّدات القسمة عليه، فالتحويل (89.3) يضع بدلاً من كل عنصر من $\lambda A + \mu B$ مثل $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$ العنصر:

$$(\alpha\sigma + \gamma\tau)a_{ij} + (\beta\sigma + \delta\tau)b_{ij} = \sigma(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) + \tau(\gamma a_{ij} + \delta b_{ij}) = \sigma m_{ij} + \tau n_{ij},$$

أي العنصر الموافق من $\sigma M + \tau N$. وبالتالي يضع بدلاً من كل محدَّد ذي j صفًّا من $\lambda A + \mu B$ ، محدَّدًا من $\sigma M + \tau N$. ووفقـًا لذلك، إذا كانت (89.3) تستبدل $\sigma M + \tau N$ بـ $\lambda a + \mu b$ ، فإن $(\sigma m + \tau n)^{\nu}$ ستكون عندئذ عاملاً من عوامل جميع محدَّدات $\sigma M + \tau N$ التي تحوي j صفًّا. وفضلاً عن ذلك، فلن تشكل أية قوة أعلى $(\sigma m + \tau n)^{\nu + 1}$ عاملاً مشتركًا لجميع محدَّدات $\sigma M + \tau N$ ذات الـ j صفًّا، ذلك لأنه إذا طبَّقنا التحويل المعاكس لـ (89.3) ، فسنستنتج أن $(\lambda a + \mu b)^{\nu + 1}$ عامل مشترك لجميع المحدَّدات المصغَّرة ذات الـ j صفًّا من $\lambda A + \mu B$ ، مما يخالف الفرض. وهو المطلوب.

ولدينا أيضًا النتيجة:

نتيجة (٨٩ - ٢)

لتكن A ، B ، C و D أربع مصفوفات $n \times n$ عناصرها في حقل $\mathcal{F}$ ، بحيث تكون الحزمتان $\lambda A + \mu B$ و $\lambda C + \mu D$ غير شاذتين. لتكن $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ أربع عناصر من الحقل $\mathcal{F}$ بحيث إن $\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$ ولنعرِّف

$$M = \alpha A + \beta B, \quad N = \gamma A + \delta B, \quad M_1 = \alpha C + \beta D, \quad N_1 = \gamma C + \delta D.$$

إذا كان $\sigma M + \tau N = \lambda A + \mu B$ بحيث إن $\sigma M_1 + \tau N_1 = \lambda C + \mu D$ أيضًا فعندئذ تكون القواسم الابتدائية لِـ $\sigma M + \tau N$ مساوية لتلك الموافقة لِـ $\sigma M_1 + \tau N_1$ إذا، وفقط إذا، كانت القواسم الابتدائية لِـ $\lambda A + \mu B$ مساوية لتلك الموافقة لِـ $\lambda C + \mu D$.

لنعد الآن إلى الجزء الأول من هذه الفقرة ولنفرض أن A شاذة ولكن الحزمة $\lambda A + B$ غير شاذة أي لنفرض أن $|A| = 0$ ، ولكن توجد قيمة لِـ λ ، ولنقل $\lambda = k$ ، بحيث إن $|k A + B| \neq 0$. لنكتب

$$M = k A + B, \qquad M_1 = k C + D,$$
$$N = A, \qquad N_1 = C.$$

فمن الواضح أن الزوج A, B سيكون مكافئًا للزوج C ، D إذا، وفقط إذا كان الزوج M, N مكافئًا للزوج M_1, N_1 . ويصحّ هذا الشرط الأخير إذا، وفقط إذا كانت M_1 غير شاذة وكان للمصفوفتين $\sigma M + N$ ، $\sigma M_1 + N_1$ القواسم الابتدائية نفسها. وبما أن

$$\sigma M + N = (\sigma k + 1) A + \sigma B = \lambda A + \mu B,$$
$$\sigma M_1 + N_1 = (\sigma k + 1) C + \sigma D = \lambda C + \mu D,$$

ونجد من النتيجة حيث

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أن لِـ $\sigma M + N$ و $\sigma M_1 + N_1$ القواسم الابتدائية نفسها إذا، وفقط إذا كان لِـ $\lambda A + \mu B$ و $\lambda C + \mu D$ القواسم الابتدائية نفسها.

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية:

نظرية (٨٩ - ٣)

لتكن A ، B ، C و D أربع مصفوفات مربّعة $n \times n$ في حقل $\mathcal{F}$ بحيث

لا يتــطابق أيّ من المحــدَّدين $|\lambda A + \mu B|$ و $|\lambda C + \mu D|$ مع الصفــر. فالـزوج A, B يكــافيء الــزوج C, D إذا، وفقـط إذا كان للمــصــفــوفــتــين $\lambda A + \mu B$ و $\lambda C + \mu D$ القواسم الابتدائية نفسها.

وسنشـير إلى الحالة التي لا يكون فيها المحدَّدان $|\lambda A + \mu B|$ و $|\lambda C + \mu D|$ مطابقين للصفر على أنها الحالة غير الشاذة. ويمكننا عندئذ إعادة صياغة نتائج الفقرة ٨٨ كما يلي:

نظريـة (٨٩ ـ ٤)

ليكــن $a(x, u) = X'AU$ ، $b(x, u) = X'BU$ و $c(y, v) = Y'CV$ ، $d(y, v) = Y'DV$ زوجــين من الصيغ ثنـائية الخـطّية، الـزوج الأول في مجمـوعتي المتغـيرات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ والـزوج الثـاني في مجمـوعتي المتغيرات $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ، $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ، وعناصر هذه الصيغ جميعًا في حقل $\mathcal{F}$. في الحالة غير الشاذة، يكون الشرط اللازم والكافي لوجود تحويلات غير شاذة $X = PY$ ، $U = QV$ ، عناصرها في $\mathcal{F}$ ، بحيث يتحول، وبصورة آنية، $a(x, u)$ إلى $c(y, v)$ و $b(x, u)$ إلى $d(y, v)$ ، هو أن يكـون للمصفوفتين $\lambda A + \mu B$ و $\lambda C + \mu D$ القواسم الابتدائية نفسها، أو، إذا فضّلنا العوامل اللامتغيرة نفسها.

٩٠ ـ العبارات القانونيّة من أجل زوج من الصيغ ثنائيّة الخطّية في الحالة غير الشاذة

لنعتبر الصيغتين ثنائيتي الخطّية $X'AU$ ، $X'BU$ مصفوفتاهما A و B هما بحيث إن المحدَّد $|\lambda A + \mu B|$ لا يطابق الصفر. ووفقًا للفقرة ٨٩ يمكن أن نفترض أساسًا للحزمة نختــاره بحيث تكــون A غير شاذة. ويكــافيء الــزوج A, B عنــدئــذ الــزوج $AA^{-1} = I$ و $BA^{-1} = D$ كما يكون للمصفوفتين $A\lambda + B$ و $\lambda I + D$ القواسم الابتدائية نفسها. ويمكننا الآن أن نطبّق على D تحويلاً مشابهًا $P^{-1}DP$ حيث نختار P بحيث تكــون $P^{-1}DP$ إمــا صيغــة جوردان الــقــانــونــيّة J كما عُرضــت في (67.2) و (67.3) ، أو الصيغة القانونيّة القياسيّة R ، كما عُرضت في (69.2) و (69.5) للمصفوفة D .

وهكذا نجد النظرية :

نظريـة (٩٠ ـ ١)

ليكــن $a(x, u) = X'AU$ و $b(x, u) = X'BU$ زوجًــا من الـصـيغ ثنــائـية الخـطِّية في مجمــوعتــين من n من المتغــيّرات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ مصفوفتاهما A و B ، على الترتيب : إذا كانت A غير شاذة ، فيوجد تحويلان غير شاذين $X = PY$ ، $U = QV$ بحيث تتحول $a(x, u)$ إلى صيغة ثنائيّة الخطِّية مصفوفتها I ، بينما تتحول $b(x, u)$ إلى صيغة مصفوفتها هي إما الصيغة القانونية القياسية أو صيغة جوردان القانونية لِـ BA^{-1} .

إذا كانــت A غير شاذة ، فيمكــن اختيار B دائــمًا بحيث إن $BA^{-1} = D$ ، حيث D أي مصفـوفة مربّعة $n \times n$. وفي الحقيقة علينا فقط أن نأخذ $B = DA$. والآن وباعتبار أن للمصفوفة $\lambda A + B$ القواسم الابتدائية نفسها والعوامل اللامتغيرة نفسها الخاصة بالمصفوفة $\lambda I + BA^{-1} = \lambda I + D$ ، فلدينا النتيجتان التاليتان :

نتيجـة (٩٠ ـ ٢)

توجــد صيغتــان ثنــائيتــا الخــطّية $a(x, u) = X'AU$ و $b(x, u) = X'BU$ في مجمــوعتــين من n من المتغـيرات $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ، فيها A غير شاذة ، بحيث إن لمصفـوفة الحزمة $\lambda A + B$ أية قواسم ابتدائية محدَّدة سلفًا ومجموع درجاتها يساوي n .

نتيجـة (٩٠ ـ ٣)

لتكن $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_s(\lambda)$ كثـيرات حدود واحدية معاملاتها في حقل $\mathcal{F}$ بحيث تقبــل e_{i+1} القسمـــة على e_i $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ وحيث يكــون مجمـــوع درجاتها n . فتوجد صيغتان ثنائيتا الخطّية معاملاتها في $\mathcal{F}$ ، وفيها A غير شاذة ، بحيث يكون لمصفوفة الحزمة $\lambda A + B$ العوامل اللامتغيرة $1, 1, \ldots, 1, e_1(\lambda), \ldots, e_s(\lambda)$.

٩١ ـ مصفوفات متناظرة ومائلة التناظر

نطبِّق الآن نظرية القـواسم الابتـدائية على صيغتـين تربيعيتين . ونبرهن أولاً التمهيدية التالية :

تمهيدية (٩١ ـ ١)

لتكن A و C مصفوفتين مربعتين $n \times n$ كلاهما متناظرة، أو كلاهما مائلة التناظر، عناصرهما في حقل الأعداد المركبة $\mathscr{C}$. إذا وُجدت مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث إن $PCQ = A$ ، فعندئذ توجد مصفوفة غير شاذة R ، تعتمد على P و Q ، ولكن ليس على A أو C ، بحيث إن $R'CR = A$.

بما أن A و C بالفرض متناظرتان كلاهما، أو كلاهما مائلة التناظر، فيمكننا كتابة

$$A' = \varepsilon A, \;\; C' = \varepsilon C, \;\; \varepsilon = \pm 1.$$

ومن العلاقة

$$PCQ = A, \tag{91.1}$$

نجد بعد أخذ مدوّر الطرفين:

$$Q'C'P' = \varepsilon Q'CP' = A' = \varepsilon A = \varepsilon PCQ,$$

ومنه

$$Q'CP' = PCQ.$$

ومن هذه العلاقة الأخيرة، لدينا بعد خطوات واضحة:

$$CP'Q^{-1} = (Q^{-1})' PC$$

أو

$$CU' = UC, \tag{91.2}$$

حيث وضعنا

$$U = (Q^{-1})'P. \tag{91.3}$$

ومن (91.2) لدينا

$$CU'^2 = UCU' = U^2C,$$

وباستقراء سهل نجد أن

$$CU'^m = U^mC \tag{91.4}$$

من أجل أي عدد صحيح موجب m . وإذا عرفنا $U^0 = I$ ، تصحّ هذه العلاقة الأخيرة من أجل $m = 0$ أيضًا. ونستنتج عندئذ أنه إذا كانت $g(\lambda)$ أي كثيرة حدود سلّمية فلدينا

$$C_g(U') = g(U)\, C. \tag{91.5}$$

ومن (91.3) نجد أن U غير شاذة. وبالتالي واستنادًا إلى النظرية (٨٠ ـ ١) نستطيع إيجاد

مصفوفة X يمكن التعبير عنها ككثيرة حدود $g(U)$ في U ، وبحيث يكون

$$X^2 = U$$

وحيث

$$X = g(U), X' = g(U') \tag{91.6}$$

باعتبار أن $g(\lambda)$ سلَّمية ،

ولدينا الآن من (91.5) $CX' = XC.$

لنعرِّف الآن $R = X'Q$ ، فيكون عندئذ

$$R'CR = Q'XCX'Q = Q'X^2CQ = Q'UCQ.$$

ولكن من (91.3) لدينا $U = (Q')^{-1}P$ ، بحيث إن

$$R'CR = Q'(Q')^{-1}PCQ = PCQ = A.$$

وهو المطلوب.

وينبغي ، بصورة خاصة ، ملاحظة أن المصفوفة R في التمهيد تعتمد على X و Q فقط ، وباعتبار أن X تعتمد على $U = (Q')^{-1}P$ فقط ، فإن R تعتمد على P و Q فقط . وفضلاً عن ذلك ، فإنه بالرغم من أن عناصر A و C ، وبالتالي P و Q ، يمكن أن تكون حقيقية ، فليس ضروريًا أن تكون عناصر R حقيقية .

وهكذا نجد مباشرة النتيجة التالية :

نتيجة (٩١ - ٢)

ليكن A, C و B, D زوجين من المصفوفات المربّعة $n \times n$ عناصرهما في الحقل المركب ، ولنفرض أن عضوي كل زوج إما أن يكونا متناظرين معًا أو مائلي التناظر معًا . إذا كانت توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q بحيث إن $PCQ = A$ ، $PDQ = B$ ، فتوجد مصفوفة غير شاذة R بحيث إن $R'CR = A$ و $R'DR = B$.

وتنبغي أيضًا ملاحظة أن التمهيدية لا تنطبق على المصفوفتين الهرميشيتين A و C تحت التحويلات العطفية (Conjunctive) $R^*CR = A$. ذلك لأنه إذا كانت A و C هرميشيتين وفرضنا وجود مصفوفتين غير شاذتين P و Q بحيث إن $PCQ = A$. فنجد عندئذ وبعمليات واضحة أن $Q^*CP^* = A = PCQ$ ، $CP^*Q^{-1} = (Q^*)^{-1}PC$ ، $CU^* = UC$ ، حيث $U = (Q^*)^{-1}P$ ، وأخيراً $C_g(U^*) = g(U)C$. والآن لنختر كثيرة الحدود السلَّمية $g(\lambda)$ بحيث تحقِّق $X = g(U)$ العلاقة $X^2 = U$. فنستنتج عندئذ أن

$X^* = \bar{g}(U^*)$ ، بحيث يكون $CX^* = XC$ فقط إذا كان لِـ $g(\lambda)$ معاملات حقيقية . وبما أنـه ليس لدينـا الحق في توقع أن يكون لِـ $g(\lambda)$ معاملات حقيقية حتى ولو كان U حقيقيًّا، فمن الواضح أن المناقشة تفشل عند هذه النقطة .

وسنبرهن الآن

نظريـة (٩١ ـ ٣)

ليكن A, C و B, D زوجين من المصفوفات المربّعة عناصرها في الحقل المركّب، ولنفرض أن عضوي كل زوج إما أن يكونا متناظرين معًا أو مائلي التناظر معًا . إذا كانت A و C غير شاذتين، فالشرط اللازم والكافي لوجود مصفوفة غير شاذة R فوق الحقل المـركّـب بحـيث إن $R'DR = B$ و $R'CR = A$ ، هو أن يكـون للمـصفـوفتـين $\lambda C + D$ و $\lambda A + B$ العوامل اللامتغيرة نفسها، أو إذا فضلنا، القواسم الابتدائية نفسها .

لنفـرض أولاً أن مثـل هذه المصفـوفـة R موجـودة، فسنستنتج عنـدئـذ من $R'CR = A$ و $R'DR = B$ أن $R'(\lambda C + D)R = \lambda A + B$ وذلـك من أجـل جميع قيم المتغيّر السلّمي λ . وبالتالي، ووفقًا للنظرية (٥٨ ـ ١)، يكون للمصفوفتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ العوامل اللامتغيرة نفسها والقواسم الابتدائية نفسها .

وعلى العكس، لتكن A و C مصفوفتين غير شاذتين، ولنفرض أن للمصفوفتين $\lambda A + B$ ، و $\lambda C + D$ القواسم الابتدائية نفسها، وبالتالي العوامل اللامتغيرة نفسها . فعندئذ، ووفقًا للنظرية (٥٨ ـ ١) توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q ، عناصرهما في الحقل المركّب، بحيث إن $P(\lambda C + D)Q = \lambda A + B$ ، وبالتالي لدينا $PCQ = A$ و $PDQ = B$. أي أنه توجد، وفقًا للنتيجة (٩١ ـ ٢) مصفوفة غير شاذة R بحيث إن

$$R'CR = A \text{ و } R'DR = B.$$

وهو المطلوب .

٩٢ ـ شرط تلاؤم مصفوفتين

نقول عن مصفوفتين A و B مربّعتين $n \times n$ ، وعناصرهما في حقل $\mathscr{F}$ ، إنهما متـلائمتـان إذا كانت توجـد مصفـوفة غير شاذة R ، عناصرها في $\mathscr{F}$ أو في امتداد

لِـ $\mathscr{F}$ ، بحيث إن $R'AR = B$.

ونبرهن الآن النظرية :

نظريـة (٩٢ ـ ١)

لتكن A و B مصفوفتين غير شاذتين عناصرهما في الحقل المركّب . فالشرط اللازم والكافي لتكون A و B متلائمتين هو أن يكون للمصفوفتين $\lambda A + A'$ و $\lambda B + B'$ العوامل اللامتغيرة نفسها ، أو إذا فضّلنا ، القواسم الابتدائية نفسها .

لنفرض أولاً أن A و B متلائمتان . فتوجد عندئذ مصفوفة غير شاذة R فوق الحقل المركّب بحيث إن $R'AR = B$. ومنه نجد مباشرة أن $R'A'R = B'$ ، وبالتالي

$$R' (\lambda A + A') R = \lambda B + B'.$$

ونستنتج من النظرية (٥٨ ـ ١) مباشرة أن للمصفوفتين $\lambda A + A'$ و $\lambda B + B'$ العوامل اللامتغيرة نفسها والقواسم الابتدائية نفسها .

وعلى العكس ، إذا فرضنا أن لِـ $\lambda A + A'$ و $\lambda B + B'$ القواسم الابتدائية نفسها ، وبالتالي العوامل اللامتغيرة نفسها ، باعتبار أن كِلَى المصفوفتين غير شاذة ، فعندئذ توجد مصفوفتان غير شاذتين P و Q ، فوق الحقل المركّب ، بحيث يكون $P (\lambda A + A') Q = \lambda B + B'$ ، ومنه

$$PAQ = B, \quad PA'Q = B'.$$

ومنه نجد

$$P (A + A') Q = B + B', \quad P (A - A') Q = B - B'.$$

وبما أن المصفوفتين $A + A'$ و $B + B'$ متناظرتان ، بينما $A - A'$ و $B - B'$ مائلتا التناظر ، فنستنتج من النتيجة (٩١ ـ ٢) وجود مصفوفة غير شاذة R فوق الحقل المركّب بحيث إن

$$R' (A + A') R = B + B', \quad R' (A - A') R = B - B'.$$

وبإضافة هاتين المعادلتين طرفًا إلى طرف ، نجد

$$R'AR = B.$$

وهو المطلوب .

٩٣ ـ تكافؤ أزواج الصيغ التربيعية

لتكن A ، B ، C و D أربع مصفوفات مربّعة $n \times n$ متناظرة فوق الحقل المركّب ولنفرض أن A و C غير شاذتين، ولنفرض أن $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ مصفوفتان $n \times 1$ ، أو متّجهان عمودان بـ n بُعدًا، ولنعتبر الزوجين من الصيغ التربيعية:

$$a(x) = X'AX, \quad b(x) = X'BX \tag{93.1}$$

$$c(y) = Y'CY, \quad d(y) = Y'DY. \tag{93.2}$$

ونتساءل تحت أية شروط توجد تحويلات غير شاذّة $X = RY$ فوق الحقل المركّب بحيث يتحول $a(x)$ إلى $c(y)$ وفي الوقت نفسه يتحول $b(x)$ إلى $d(y)$. ووفقًا للنظرية (38.1) يلزم ويكفي أن توجد مصفوفة R غير شاذة بحيث إن

$$R'AR = C, \quad R'BR = D.$$

ووفقًا للنظرية (٩١ ـ ٣) توجد مثل هذه المصفوفة إذا، وفقط إذا، كان للمصفوفتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ القواسم الابتدائية نفسها.

لنفرض بعد ذلك أن A و C شاذتان ولكن الحزمتين $\lambda A + B$ و $\lambda C + D$ غير شاذتين. وهو ما يسمى الحالة غير الشاذة. ونكتب عندئذ الحزمتين بشكل متجانس $\lambda A + \mu B$ و $\lambda C + \mu D$. ونستنتج عندئذ من النظرية (٨٩ ـ ٤) و (٩١ ـ ٣) أن R موجودة إذا، وفقط إذا، كان للمصفوفتين $\lambda A + \mu B$ و $\mu C + \lambda D$ القواسم الابتدائية نفسها. وهكذا نجد النظرية:

نظرية (٩٣ ـ ١)

ليكن $X'AX$ ، $X'BX$ و $Y'CY$ ، $Y'DY$ زوجين من الصيغ التربيعية في n من المتغيّرات معاملاتها في حقل الأعداد المركّبة. ففي الحالة غير الشاذة، يتكافأ الزوجان من الصيغ التربيعية تحت تحويلات غير شاذة إذا، وفقط إذا كان للمصفوفتين $\lambda A + \mu B$ و $\lambda C + \lambda D$ القواسم الابتدائية نفسها.

٩٤ - عبارة قانونيّة لزوج من الصيغ التربيعيّة في الحالة غير الشاذة

لنعتبر الزوج من الصيغ التربيعية في (93.1) حيث يمكن أن نفترض أن A غير شاذة. فمن السهل أن نرى بالتجربة أن للمصفوفة λ – المربّعة $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & \alpha+\lambda \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \alpha+\lambda & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha+\lambda & 1 \cdots & 0 & 0 \\ \alpha+\lambda & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (n > 1); (\alpha + \lambda), n = 1; \tag{94.1}$$

قاسمًا ابتدائيًا واحدًا هو $(\lambda + \alpha)^n$. وإذا أخذنا عندئذ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, (n > 1) \tag{94.2}$$

أو

$$A = (1), \quad B = (\alpha), \quad (n = 1), \tag{94.3}$$

ومن الواضح أن A غير شاذة، وأن كلاًّ من A و B متناظرتان ويمكن أخذهما كمصفوفتي صيغتين تربيعيتين، وللمصفوفة $\lambda A + B$ القاسم الابتدائي الموصوف أعلاه $(\lambda + \alpha)^n$.

من السهل أن نرى الآن أننا نستطيع كتابة مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ متناظرتين A و B ، منها A غير شاذة وبحيث يكون لـ $\lambda A + B$ أية قواسم ابتدائية

$$(\lambda + \alpha_1)^{\nu_1}, \ (\lambda + \alpha_2)^{\nu_2}, \ (\lambda + \alpha_t)^{\nu_t}, \ldots, (\sum \nu_i = n) \tag{94.4}$$

مجموع قواها يساوي n . والمقادير α هنا ليست بالضرورة متميِّزة. وفي الحقيقة كل ما نضطر للقيام به هو أن نأخذ A و B كمجموعين مباشرين لـ t من المصفوفات

$$A = A_1 \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_t, \tag{94.5}$$

$$B = B_1 \dotplus B_2 \dotplus \ldots \dotplus B_t, \tag{94.6}$$

حيث A_i مصفوفة مربعة $v_i \times v_i$ مثل A في (94.2) أو (94.3) وذلك وفقًا لما إذا كان $v_i > 1$ أو $v_i = 1$ ، بينما B_i هي مصفوفة مربّعة $v_i \times v_i$ مثل B في (94.2) أو في (94.3) مع وضع α_i بدلاً من α . ومن الواضح أن

$$\lambda A + B = (\lambda A_1 + B_1) \dotplus (\lambda A_2 + B_2) \dotplus \dots \dotplus (\lambda A_t + B_t) \tag{94.7}$$

وبما أن هذه المصفوفة تتألف بوضوح من قوالب قطرية منفصل بعضها عن بعض فنستنتج من النظرية (٥٦ ـ ٤) أن قواسمها الابتدائية هي بدقة تلك الموافقة لقوالبها $\lambda A_i + B_i$ نفسها، أي العبارات في (94.4).

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية، التالية:

نظرية (٩٤ ـ ١)

في حقل الأعداد المركّبة توجد صيغتان تربيعيتان $a(x) = X'AX$ ، $b(x) = X'BX$ ، في n من المتغيّرات، A غير شاذة، بحيث يكون لمصفوفة الحزمة $\lambda A + B$ أية قواسم ابتدائية موصوفة مجموع درجاتها n .

٩٥ ـ تفسير هندسي

يُبرهن في الهندسة التحليلية المستوية أنه إذا كانت y, x تمثّلان الإحداثيات الكارتيزية لنقطة في مستوى، وكانت المعاملات $a, b, \dots, c$ أعدادًا حقيقية، فإن الخط البياني للمعادلة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \tag{95.1}$$

هو مقطع مخروطي، يمكن أن يضمحل (degenerate) في حالات خاصة إلى زوج من الخطوط. وسنوافق على تسمية الخط البياني لـ (95.1) مقطعًا مخروطيًّا بالرغم من أنه قد لا يكون هناك أية نقطة حقيقية عليه. وعلى سبيل المثال، سندعو الخط البياني لِـ

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \tag{95.2}$$

دائرة تخيلية.

وفي العديد من الحالات يكون من المناسب أن نجعل المعادلة (95.1) متجانسة بوضع $\frac{x}{z}$ و $\frac{y}{z}$ ، على الترتيب، بدلاً من x و y ، ثم ضرب الطرفين في z^2 . وستدعى

عنـدئـذ الثلاثية (x, y, z) الإحداثيات الكارتيزية المتجانسة لنقطة P . وإذا كان $z \neq 0$ ، فإن P هي النقطة التي إحداثياتها الكارتيزية $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ ، أما إذا كان $z = 0$ فإن P هي نقطة في اللانهاية في الاتجاه (x, y) . وتصبح المعادلة (95.2) بعد كتابتها في صيغة متجانسة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

وبصورة مشابهة ، فإن المعادلة $y^2 = 4x$ وهي معادلة قطع مكافيء تصبح في صيغة التجانس :

$$y^2 = 4xz \qquad (95.3)$$

وبعـد جعـل معادلة ما متجانسة وفقًا للطريقة الموصوفة آنفًا، فكثيرًا ما نجد من الملائم أن يأخذ x و z أو y و z كل منهما مكان الآخر. وإذا قسَّمنا عندئذ طرفيْ المعـادلـة النـاتجـة على z^2 ووضعنـا x بدلاً من $\frac{x}{z}$ و y بدلاً من $\frac{y}{z}$ ، فيمكن أن تمثِّل المعادلة الناتجة مخروطًا مختلفًا عن ذلك الذي تمثِّله المعادلة الأصلية. وهكذا فإن المعـادلـة النـاتجـة عن (95.3) نتيجة لإجراء تبادل بين y و z ثم استعادة الشكل غير المتجانس هي $4xy = 1$. وتمثِّل هذه المعادلة الأخيرة قطعًا زائدًا بينما تمثِّل المعادلة الأصلية قطعًا مكافئًا. ونقول: إننا حصلنا على المنحني الثاني من المنحني الأول نتيجة إسقاط خط مختلف على اللانهاية.

وبدلاً من استخدام المتغيّرات x ، y و z ، سنستخدم بصورة متكررة الإحداثيات الإسقاطية المتجانسة (x_1, x_2, x_3) ونتفق على أن أيًا من المقادير x الثلاثة يمكن أن يلعب دور z .

٩٦ ـ تصنيف أزواج الصيغ التربيعيّة في ثلاثة متغيّرات

لنـرمـز بـ $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ لمصفوفتين مربّعتين 3×3 متناظرتين وعناصرهما في حقـل الأعـداد المركّبة، ولنرمز بـ $X = [x_1, x_2, x_3]$ لمصفوفة 3×1 أو متّجه عمود مركّبـاتـه (x_1, x_2, x_3) هي الإحـداثيات الإسقـاطية المتجـانسـة لنقطة في المستوى. وتمثِّـل المعـادلتـان $a(x) = X'AX = 0$ ، $b(x) = X'BX = 0$ عنـدئـذ مخروطـين في المستـوى، كل منهـما حقيقي أو مركّب. وإذا كان λ متغـيرًا سلّميًا فإن المعـادلـة

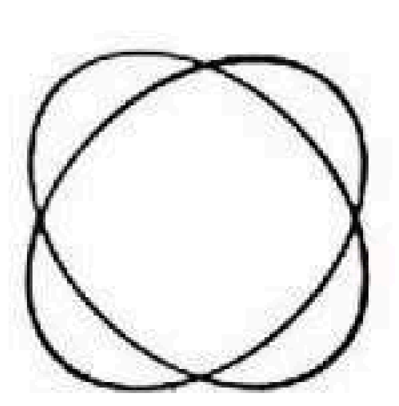
$\lambda\, a\,(x) + b\,(x) = 0$ تمثّل حزمة من المخاريط مصفوفتها $\lambda\, A + B$. وسنفترض أن مصفوفة الحزمة غير شاذة، أي أن الحزمة تحوي مخاريط غير شاذة. وبدون أي انتقاص من شمولية المسألة، يمكننا أن نفترض أن A مصفوفة غير شاذة.

ووفقًا للنظرية (٩٤ - ١) يمكننا دائمًا اختيار A و B بحيث يكون للمصفوفة $\lambda\, A + B$ أية قواسم ابتدائية. مجموع درجاتها يساوي 3. وسنصنِّف الحُزم من المخاريط وفقًا لمميز سيجر.

(I) مميَّز سيجر $[(1), (1), (1)]$ ؛ القواسم الابتدائية $\lambda + \alpha_1, \lambda + \alpha_2, \lambda + \alpha_3$.
ويمكننا في هذه الحالة أن نأخذ $A = I$ و $B = diag\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ، أي أن

$$a\,(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad b\,(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2,$$

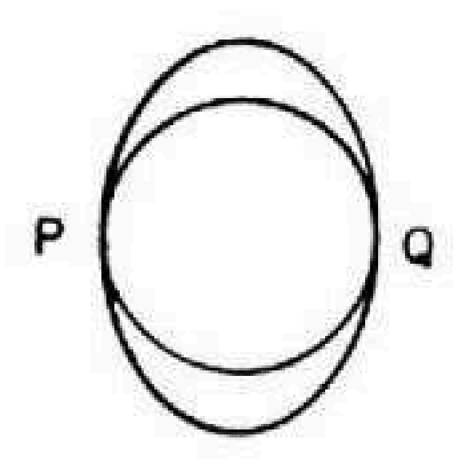
حيث نفترض أن جميع المقادير α متميِّزة. ويمكن أن نبيِّن هنا أن المخروطين يتقاطعان في أربع نقاط متميِّزة. وهي الحالة العامة. ومن الواضح أنه ليس للمخروط $a\,(x) = 0$ هنا أية نقطة حقيقية. وللحصول على محلّ هندسي حقيقي يمكن أن نأخذ $a\,(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ و $b\,(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 - \alpha_3 x_3^2$. والقواسم الابتدائية لِـ $\lambda\, A + B$ هنا هي القواسم نفسها المذكورة سابقًا.



شكل I

وإذا وضعنا الآن $x_1 = x$ ، $x_2 = y$ و $x_3 = 1$ ، فسنحصل على مخروطين حقيقيين يوضِّحان الحالة I . وعلى سبيل المثال، $x^2 + y^2 - 1 = 0$ و $50x^2 - 25y^2 - 2 = 0$.

(II) مميَّز سيجر هو $[(11)\,(1)]$ ، والقواسم الابتدائية $\lambda + \alpha_1, \lambda + \alpha_1, \lambda + \alpha_2$.
ونأخذ هنا $A = I$ و $B = diag\,(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$ أي أن $a\,(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ و



شكل II

$b(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_1 x_2^2 + J_2 x_3^2$. ويتقاطع هذان المخروطان في النقطتين $P(1, i, 0)$ و $Q(1, -i, 0)$ ويتماسان بصورة عادية عند كل من هاتين النقطتين.

توضيح : $2x^2 + y^2 - 2 = 0$ و $x^2 + y^2 - 1 = 0$

(III) مميِّز سيجر [(111)] ، والقواسم الابتدائية $\lambda + \alpha$ ، $\lambda + \alpha$ ، $\lambda + \alpha$. نأخذ ثانية $A = I$ و $B = diag(\alpha, \alpha, \alpha)$. وهنا يتطابق $a(x) = 0$ و $b(x) = 0$.

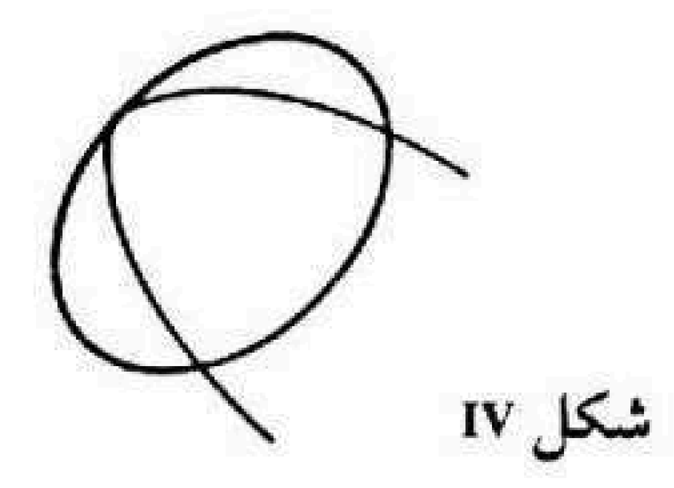
(IV) مميِّز سيجر [(2) (1)] ، القواسم الابتدائية $(\lambda + \alpha_2)^2$ ، $(\lambda + \alpha_1)$. وهنا يمكن أن نأخذ كمصفوفة للحزمة :

$$\begin{bmatrix} \lambda + \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \alpha_2 \\ 0 & \lambda + \alpha_2 & 1 \end{bmatrix},$$

أي أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

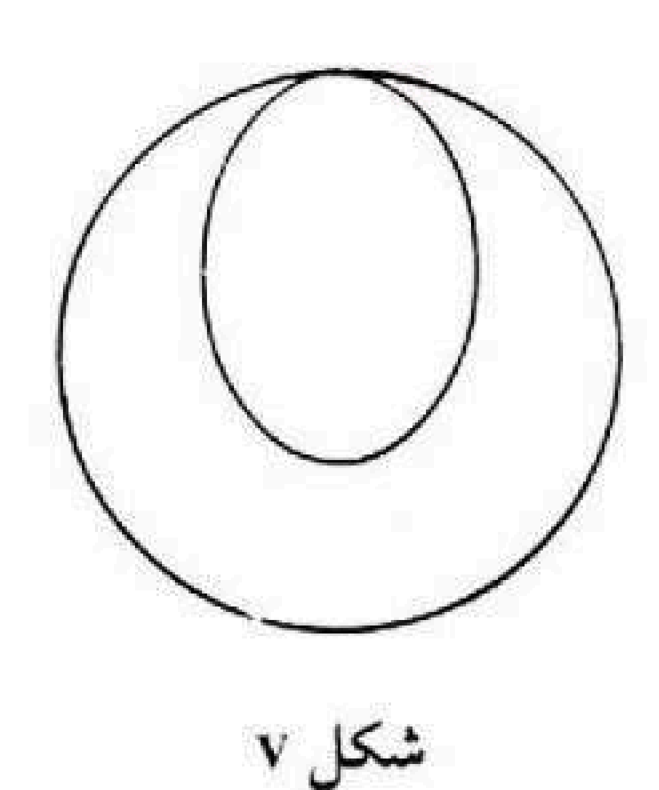
ويتقاطع المخروطان $a(x) = x_1^2 + 2x_2x_3 = 0$ و $b(x) = \alpha_1 x_1^2 + 2\alpha_2 x_2 x_3 + x_3^2 = 0$ في ثلاث نقاط يتماسَّان في إحداها.



شكل IV

توضيح: لنأخذ $x_1 = x$ ، $x_2 = -1$ ، $x_3 = y$ ، $\alpha_1 = 2$ و $\alpha_2 = 3$ ، فنجد $x^2 - 2y = 0$ و $2x^2 - 6y + y^2 = 0$.

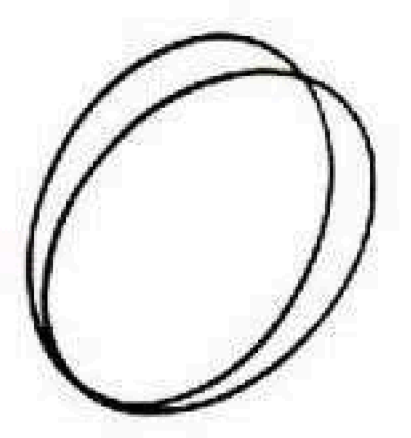
(V) مميِّز سيجر [(2 1)] ، القواسم الابتدائية $(\lambda + \alpha)^2$ و $(\lambda + \alpha)$ نحصل على هذه الحالة من IV بوضع $\alpha_1 = \alpha_2$. والمخروطان $a(x) = x_1^2 + 2x_2x_3 = 0$ و $b(x) = \alpha(x_1^2 + 2x_2x_3) + x_3^2 = 0$ يلتقيان في نقطة واحدة $(0, 1, 0)$ ولها أربع نقاط تماس هناك.



شكل ٧

توضيح: لنأخذ $x_1 = x$ ، $x_2 = 1$ ، $x_3 = y$ و $\alpha = 2$ ، فنحصل على $a(x) = x^2 + 2y = 0$ و $b(x) = 2x^2 + y^2 + 4y = 0$.

(VI) مميِّز سيجر [(3)] ، القاسم الابتدائي $(\lambda + \alpha)^3$ ويمكن أن نأخذ كمصفوفة للحزمة $\lambda A + B$.



شكل VI

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda+\alpha \\ 0 & \lambda+\alpha & 1 \\ \lambda+\alpha & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

ومنه

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ومعادلتا المخروطين هما $a(x) = x_2^2 + 2x_1x_3 = 0$ و $b(x) = \alpha(x_2^2 + 2x_1x_3) + 2x_2x_3 = 0$. ويتقاطع المخروطان في نقطتين $P(1,0,0)$ و $Q(0,0,1)$ ، ولهما ثلاث نقاط تماس في P .

توضيح : لنضع $x_1 = 1$ ، $x_2 = x$ ، $x_3 = y$ و $\alpha = +1$ ، فنجد $a(x) = x^2 + 2y = 0$ و $b(x) = x^2 + 2y + 2xy = 0$.

تمارين

في كل من التمارين من ١ إلى ٤ حدِّد ما إذا كانت المصفوفتان A و B متلائمتين أم لا :

١) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$

٢) $A = \begin{bmatrix} 9 & 17 \\ 16 & 30 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix};$

٣) $A = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 9 \\ 7 & -1 & 9 \\ 22 & -15 & 18 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix};$

٤) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

صنّف كلاًّ من أزواج المخاريط التالية $a\,(x) = 0$ و $b\,(x) = 0$ وفقًا لمصفوفة الحزمة $\lambda A + B$ وحدِّد العلاقة الهندسية بين المخروطين.

٥) $a(x) = x^2 - 2y, \qquad b(x) = x^2 + y^2 - 4y;$

٦) $a(x) = x^2 + 2y, \qquad b(x) = x^2 + 2y + y^2;$

٧) $a(x) = x^2 + y^2 - 1, \qquad b(x) = 2x^2 + y^2 - 2;$

٨) $a(x) = x^2 - 2y^2 + 2y, \qquad b(x) = x^2 - 2y^2 + 2y - 2xy;$

٩) $a(x) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1, \qquad b(x) = x^2 + \left(y + \dfrac{a^2e^2}{b}\right)^2 - \dfrac{a^4}{b^2}$

١٠) $a(x) = x^2 + y^2 + 6y - 7, \qquad b(x) = x^2 + 4y^2 - 4$

١١) $a(x) = x^2 - 4y - 4, \qquad b(x) = x^2 + y^2 - 2y - 3$

١٢) $a(x) = x^2 - y, \qquad b(x) = x^2 + y^2 + 8x - 7y - 3$

١٣) $a(x) = x^2 - 2y^2 - 1, \qquad b(x) = x^2 + 4y^2 - 25$

١٤) $a(x) = x^2 - y, \qquad b(x) = x^2 + y$

١٥) $a(x) = x^2 + y^2 - 1, \qquad b(x) = x^2 - y^2 - 1$

الفصل التاسع عشر

المصفوفات التبادلية

٩٧ ـ صياغة المسألة

لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها في حقل عددي $\mathscr{F}$. إذا كانت $X = (x_{ij})$ مصفوفة مربّعة ثانية $n \times n$ ، فليس صحيحًا بصورة عامة أن

$$AX = XA \tag{97.1}$$

وإذا صحَّت العلاقة (97.1) قلنا : إن A و X تبادليّتان أو إنهما تقبلان المبادلة . وسنفترض أن A مصفوفة معروفة ومسألتنا هي إيجاد جميع المصفوفات X التي تحقِّق (97.1) . وكما يقول ماك دوفّي (Mac Duffee) فالمسألة ليست تافهة .

فيمكن أن نحاول حلّ المسألة كما يلي. لنعتبر (x_{ij}) عناصر X كمجاهيل . فعندئذ إذا ساوينا عنصري الموضع (i, j) في طرفي (97.1) نجد

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} x_{tj} = \sum_{t=1}^{n} x_{it} a_{tj},$$

وهذا يقودنا إلى n^2 من المعادلات الخطِّية المتجانسة في n^2 من المجاهيل x_{ij} . وبما أن حل مجموعة معادلات كهذه يتضمن عمليات قياسية فقط، فإنه يمكن في هذه الحالة إيجاد حلول X عناصرها في الحقل $\mathscr{F}$ نفسه . ولكن الطريقة لا تسحب نفسها بصورة مباشرة إلى حلّ عام للمسألة . ولذلك فإنّنا سنواجه المسألة بطريقة مختلفة .

قبل كل شيء، نلاحظ أن مجموعة كل المصفوفات X ، التي تقع عناصرها في الحقل $\mathscr{F}$ ، والتي تحقِّق (97.1) تشكل فضاء متّجهات خطِّيًا فوق $\mathscr{F}$. ذلك لأنه من الواضح أن المصفوفات تحقِّق الشروط (3.5) ,... ,(3.1). وفضلاً عن ذلك، إذا كانت X

و Y مصفوفتين تحقِّقان (97.1) وكان λ و μ عددين سلَّميين، فمن الواضح عندئذ أن $\lambda X + \mu Y$ تحقِّق (97.1). ويمكن عرض هذه النتيجة على شكل نظرية.

نظريـة (٩٧ ـ ١)

لتكن A مصفوفة مربّعة $n \times n$ عناصرها a_{ij} تنتمي إلى حقل $\mathscr{F}$. فمجموعة كل المصفوفات X التي تقع عناصرها في $\mathscr{F}$ والتي تحقِّق العلاقة $AX = XA$ تشكّل فضاء متّجهات خطِّيًا فوق $\mathscr{F}$.

ونبرهن بعد ذلك النظرية

نظريـة (٩٧ ـ ٢)

إذا كانت $P^{-1}AP = B$ و $P^{-1}XP = Y$ ، فعندئذ يكون $AX = XA$ إذا، وفقط إذا كان $BY = YB$

ذلك لأن
$$BY = P^{-1}AP \,.\, P^{-1}XP = P^{-1}AXP,$$
و
$$YB = P^{-1}XP \,.\, P^{-1}AP = P^{-1}XAP,$$
ومنه $BY - YB = P^{-1}(AX - XA)\,P$. وبما أن P غير شاذة فإن $AX - XA = 0$ إذا، وفقط إذا كان $BY - YB = 0$.

وعند دراسة المعادلة (97.1) ، تمكِّننا هذه النظرية الأخيرة من وضع أي مصفوفة مشـابهة لِـ A بدلاً من المصفوفة A . وسنجد من الملائم أن نضع بدلاً من A صيغة جوردان القانونية الموافقة لِـ A . وبعبارة أخرى، سنأخذ A في صيغة جوردان القانونية الخاصة بها.

٩٨ ـ استخدام صيغة جوردان القانونية

لتكن الدالة المميَّزة لِـ A :
$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} (\lambda - \alpha_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \alpha_s)^{n_s}, (\sum n_i = n),$$
بحيث يكـون لِـ A جذور مميَّزة متميِّز بعضهـا عن بعض هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ مكـررة

$n_1, n_2, \ldots, n_s$ على الترتيب . فعندئذ تكون صيغة جوردان القانونية الموافقة لِـ A هي :

$$A = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \cdots \dotplus J_s = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{bmatrix}, \qquad (98.1)$$

حيث J_i مصفوفة مربّعة $n_i \times n_i$ من الشكل

$$J_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_i \end{bmatrix}. \qquad (98.2)$$

والدالّة المميَّزة لِـ J_i هي $(\lambda - \alpha_i)^{n_i}$ ، بينما تحدّد القواسم الابتدائية لِـ $J_i - \lambda I$ ، وتتحدَّد، بعدد وتوزّع المقادير 1 في القطر العلوي الأول.

وبما أننا نريد لِـ X أن تقبل التبادل مع A ، فلا بدَّ لها أن تقبل التبادل مع كل كثيرة حدود سلَّمية في A ، وبالتالي مع المصفوفات الرئيسة متساوية القوى $E_1, E_2, \ldots, E_s$ الموافقة لِـ A . والآن، معتبرين A في صيغتها القانونية (98.1) ، نستنتج من الفقرة ٧٧ أن E_i هي المصفوفة التي نحصل عليها من A في (98.1) بعد أن نضع بدلاً من J_i المصفوفة المحايدة I_{n_i} المربعة $n_i \times n_i$ ، ونضع 0 بدلاً من كل المصفوفات J الباقية. والآن لنجزيء X ، صفوفها وأعمدتها على حدٍّ سواء، تمامًا كما تتجزأ A في (98.1) ، فنجد

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{bmatrix}. \qquad (98.3)$$

ومن السهل أن نرى أن

$$E_iX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_{i1} & X_{i2} & \cdots & X_{in} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad XE_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & X_{1i} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & X_{2i} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & X_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

بحيث إن $X E_i = E_i X$ إذا، وفقط إذا كان $X_{ij} = X_{ji} = 0$. وبالتالي فإن X هي مصفوفة قوالب قطرية من الشكل

$$X = X_{11} \dotplus X_{22} \dotplus \cdots \dotplus X_{nn} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (98.4)$$

ونرى الآن مباشرة أنه لكي تقبل X في (98.3) التبادل مع A في (98.4) يلزم ويكفي أن يكون $X_{ij} = 0$ ، $(i \neq j)$ ، وأن كل X_{ii} تقبل التبادل مع J_i الموافقة لها . وهكذا نكون قد اختصرنا المسألة إلى الحالة التي يكون فيها لـ A جذر مميَّز وحيد α.

لنفرض الآن أن لِـ A جذرًا مميَّزًا وحيدًا α ، ولتكن القواسم الابتدائية لِـ $\lambda I - A$ هي :

$$(\lambda - \alpha)^{\nu_1}, (\lambda - \alpha)^{\nu_2}, \ldots, (\lambda - \alpha)^{\nu_t} \qquad (98.5)$$

حيث نأخذ $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_t$ و $\sum \nu_i = n$. وتكون صيغة جوردان القانونية لِـ A هي عندئذ :

$$A = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \cdots \dotplus J_t = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_t \end{bmatrix}. \qquad (98.6)$$

والـدالّـة المميَّزة المختـزلـة لِـ A هي $(\lambda - \alpha)^{\nu_1}$ بحيث إنـه إذا وضعنا $A - \alpha I = N$ تكـون N معـدومـة القـوى ودليلهـا ν_1. وفي الحقيقـة تكون القواسم الابتدائية لِـ N هي $\lambda^{\nu_1}, \lambda^{\nu_2}, \ldots, \lambda^{\nu_s}$ ، ويمكن كتابة N على الشكل :

$$N = N_1 \dotplus N_2 \dotplus \cdots \dotplus N_t = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_t \end{bmatrix}, \tag{98.7}$$

حيث N_i مصفـوفـة مربّعـة $\nu_i \times \nu_i$ لها قاسم ابتـدائي وحيد هو λ^{ν_i}. وبـما أن αI مقدار سلّمي ، فمن الواضح أن X تقبل التبادل مع A إذا، وفقط إذا، كانت X تقبل التبادل مع N . ومسألتنا إذن هي أن نحدِّد أعمّ مصفوفة X ، مربّعة $n \times n$ وتقبل التبادل مع N المذكورة في (98.7). أي لنكتب

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1t} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{t1} & X_{t2} & \cdots & X_{tt} \end{bmatrix}, \tag{98.8}$$

حيث X_{ij} مصفوفة $\nu_i \times \nu_j$. فالشرط $XN = NX$ يكافيء كون :

$$\begin{bmatrix} N_1X_{11} & N_1X_{12} & \cdots & N_1X_{1t} \\ N_2X_{21} & N_2X_{22} & \cdots & N_2X_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_tX_{t1} & N_tX_{t2} & \cdots & N_tX_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}N_1 & X_{12}N_2 & \cdots & X_{1t}N_t \\ X_{21}N_1 & X_{22}N_2 & \cdots & X_{2t}N_t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{t1}N_1 & X_{t2}N_2 & \cdots & X_{tt}N_t \end{bmatrix},$$

أو

$$N_iX_{ij} = X_{ij}N_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t)$$

ونبرهن الآن التمهيدية التالية :

تمهيديـة (٩٨ ـ ١)

لتكن N_m صيغة جوردان القانونية لمصفوفة مربّعة $m \times m$ ، معدومة القوى وغير

متردِّية، ولتكن N_n مصفوفة مربّعة $n \times n$ من النوع نفسه. فالمصفوفة الأعم $\underset{m\times n}{X}$ التي تحقّق العلاقة $N_m X = X N_n$ هي من أحد الشكلين (98.9) أو (98.10) وفقًا لما إذا كان $m \leqslant n$ أو $m > n$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & x_0 & \cdots & x_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_0 \end{bmatrix}, \quad (m \leq n) \tag{98.9}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ 0 & x_0 & \cdots & x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (m > n). \tag{98.10}$$

ومن المفهوم ضمنًا أنه إذا كان $m = n$. فإننا نحذف الأعمدة الـ $n - m$ الأولى التي تحوي أصفارًا في (98.9)، أو الصفوف الـ $m - n$ الأخيرة التي تحوي أصفارًا في (98.10).

لبرهان هذه التمهيدية، لتكن $X = (x_{ij})$ المصفوفة $m \times n$ التي نريد تحديدها. فتقود العلاقة $N_n X = X N_m$ عندئذ إلى ما يلي:

$$\begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \cdots & x_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n-1} \\ 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn-1} \end{bmatrix}.$$

ومن العمودين الأولين في المصفوفتين نجد مباشرة

$$x_{21} = x_{31} = \ldots = x_{m1} = 0 \tag{98.11}$$

بينما نجد من الصفَّين الأخيرين:

$$x_{m1} = x_{m2} = \ldots = x_{m\,n-1} = 0 \tag{98.12}$$

وفضلاً عن ذلك، وبمساواة العنصرين في الموضع (k, l) من المصفوفتين نجد:

$$x_{k\,l-1} = x_{k+1\,l} \qquad \begin{matrix}(k = 1, 2, \ldots, n-1)\\ (l = 2, 3, \ldots, m)\end{matrix} \tag{98.13}$$

وإذا اتفقنا على أن نعرِّف

$$x_{k0} = x_{n+1\,l} = 0$$

فسنرى أن (98.13) تصحّ أيضًا من أجل $k = n$ ، $l = 1$.

وإذا اعتبرنا الآن العناصر x_{11}, x_{22}, x_{33} على أنها العناصر التي تشكل القطر الرئيس، فمن الواضح أن (98.13) تبيِّن أن جميع عناصر X الواقعة في خطٍّ موازٍ للقطر الرئيس متساوية. ووفقًا لذلك، إذا رسمنا عبر العنصر x_{11} ، الواقع في الزاوية اليسرى العليا من المصفوفة، وعبر العنصر x_{mn} ، الواقع في الزاوية اليمنى الدنيا من المصفوفة، خطَّين موازيين للقطر الرئيس، ففي ضوء (98.11) و (98.12) ، يكون كل عنصر يقع على يسار أي من هذين الخطَّين مساويًا للصفر. وعلى طول الخط من بينهما الأبعد في اتجاه اليمين وعلى طول الخطوط الواقعة إلى اليمين والموازية لهذا الخط، تكون العناصر جميعها متساوية، إلا أنها فيما عدا ذلك تكون كيفية. وبالتالي فإن المصفوفة X هي من الشكل المبيَّن في التمهيدية، وهو المطلوب.

ويتضح بالتجربة أن عدد العناصر الاختيارية في (98.9) هو m ، بينما عدد العناصر الاختيارية في (98.10) هو n . وهكذا نجد النتيجة:

نتيجة (٩٨ - ٢)

إذا كانت X في (98.7) تقبل التبادل مع N في (98.6) ، فإن عدد الوسطاء الاختيارية في كل مصفوفة جزئية X_{ij} هو n إذا كانت X_{ij} مصفوفة مربّعة $n \times n$ ، ولكنها تساوي البُعد الأصغر لـ X_{ij} في حال كونها غير مربّعة.

ويمكننا استخدام هذه النتيجة لتحديد العدد الكلِّي للعناصر الاختيارية في X .

ونفترض كما في (98.5) أن $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_t$. وعندئذ ومن أجل كل من الـ $2t - 1$ من المصفوفات الجزئية $X_{t1}, X_{t2}, \ldots, X_{tt}, X_{t-1,t}, \ldots, X_{1t}$ الواقعة

في الصف الأخير والعمود الأخير من X ، يكون البعد الأصغر هو v_t . وبالتالي فإن العدد الكلِّي للعناصر الاختيارية في هذه المصفوفات هو $\mathrm{v}_t(3-2t)$. وإذا حذفنا الآن هذه المصفوفات الجزئية، نجد أن العدد الكلِّي للعناصر الاختيارية في الصف الأخير والعمود الأخير من المصفوفات الناتجة هو $\mathrm{v}_{t-1}(1-2t)$. وأخيرًا، فإن عدد العناصر الاختيارية في X_{11} هو v_1 . وبالتالي فإن العدد الكلِّي للعناصر الاختيارية في X هو

$$\mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2 + \dots + (2t-3)\mathrm{v}_{t-1} + (2t-1)\mathrm{v}_t.$$

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية :

نظريـة (٩٨ ـ ٣)

لتكن A مصفـوفـة مربعـة $n \times n$ جذرهـا المميَّز الـوحيد هو α ، ولتكن $(\lambda-\alpha)^{\mathrm{v}_1}, (\lambda-\alpha)^{\mathrm{v}_2}, \dots, (\lambda-\alpha)^{\mathrm{v}_t}$ ، حيث $\mathrm{v}_1 \geqslant \mathrm{v}_2 \geqslant \dots \geqslant \mathrm{v}_t$ هي القواسم الابتدائية لِـ $\lambda I - A$. فإن أعم مصفوفة X تقبل التبادل مع A تحوي

$$\sum_{i=1}^{t} (2i-1)\mathrm{v}_i = \mathrm{v}_1 + 3\mathrm{v}_2 + \dots + (2t-1)\mathrm{v}_t$$

من الوسطاء الاختيارية.

توضيح : لتكن A المصفوفة 7×7 :

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

فإن أعم مصفوفة X تقبل التبادل مع A هي

$$X = \left[\begin{array}{cccc|cc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & u_0 & u_1 & v_0 \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_0 & t_1 & y_0 & y_1 & w_0 \\ 0 & 0 & 0 & t_0 & 0 & y_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & s_0 & 0 & r_0 & z_0 \end{array}\right].$$

وبما أن القواسم الابتدائية لِـ $\lambda I - A$ هي $(2-\lambda)^4$ ، $(2-\lambda)^2$ ، $(2-\lambda)$ و $(2-\lambda)$ فلدينا $v_1 = 4$ ، $v_2 = 2$ ، $v_3 = 1$ و $t = 3$. وبالتالي فإن عدد العناصر الكيفية في X هو $v_1 + 3v_2 + 5v_3 = 4 + 6 + 5 = 15$.

وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها A غير متردّية، يكون للمصفوفة المميَّزة $\lambda I - A$ قاسم ابتدائي وحيد $(\lambda - \alpha)^n$ ، وتُختزل $N = A - \alpha I$ في (98.7) إلى قالب واحد. وفي هذه الحالة تتألف أعم مصفوفة X ، محققة للعلاقة $AX = XA$ ، من الصفوف الـ n الأولى من (98.10) فقط.

ومنه

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ 0 & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_0 \end{bmatrix} = x_0 I + x_1 N + x_2 N^2 + \cdots + x_{n-1} N^{n-1}.$$

بعد ذلك لنأخذ A كمصفوفة غير متردية دالّتها المميَّزة $f(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} (\lambda - \alpha_2)^{n_2} \dots (\lambda - \alpha_s)^{n_s}$ ، $(\sum n_i = n)$ ، والمقادير α جميعها مختلفة. فعندئذ تكون A من الشكل (98.1) ، حيث كل J_i في (98.2) هي الآن غير متردّية. وأعم مصفوفة X بحيث إن $AX = XA$ تكون من الشكل (98.4) حيث تقبل X_{ij} التبادل مع J_i . وإذا رمزنا الآن بـ E_i و N_i ، على الترتيب، للمصفوفتين الرئيسة متساوية القوى، والرئيسة معدومة القوى الموافقتين لِـ A والمقابلتين للجذر α_i ، فنجد من نتيجة الفقرة السابقة أن

$$X_{ii} = x_0^{(i)} E_i + x_1^{(i)} N_i + \cdots + x_{n_i-1}^{(i)} N_i^{n_i-1}.$$

وعندئذ نجد وفقا لِـ (98.4) أن

$$X = X_{11} \dotplus \cdots \dotplus X_{ss} = \sum_{i=1}^{s} (x_0^{(i)} E_i + x_1^{(i)} N_i + \cdots + x_{n_i-1}^{(i)} N_i^{n_i-1}).$$

وبما أن N_i, E_i كثيرتا حدود سلَّميتان في A فنستنتج أن X هي كثيرة حدود سلَّمية في A . وهكذا نجد النظرية :

نظريـة (٩٨ ـ ٤)

إذا كانت A مصفوفة غير متردّية ، فإن أعم مصفوفة X تقبل التبادل مع A هي كثيرة حدود سلَّمية في A .

٩٩ ـ المصفوفات الجزئية متساوية القوى ومعدومة القوى المصاحبة لمصفوفة A

لنعتبر المصفوفة A المربّعة 3×3 بجذر مميّز وحيد :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \tag{99.1}$$

فمن الواضح أنه إذا أخذنا

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{99.2}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = 0,$$

فعندئذ

$$\begin{aligned} &H_1^2 = H_1, \quad H_2^2 = H_2, \quad H_1 + H_2 = I, \quad H_1H_2 = H_2H_1 = 0; \\ &H_1M_1 = M_1H_1 = M_1. \quad H_2M_2 = M_2H_2 = M_2. \\ &H_1M_2 = M_2H_1 = H_2M_1 = M_1H_2 = 0. \\ &M_1^2 = 0, \quad A = 4H_1 + M_1 + 4H_2. \end{aligned} \tag{99.3}$$

وهكـذا فإن مجمـوعة المصفوفات في (99.2) تحقِّق معظم الخواص التي تحقِّقها المصفوفات الرئيسة متساوية القوى ومعدومة القوى كما ذكرناها في ٧٦ . وعلى أي حال، فمـن الـسـهـل التحقق من أنـه لا يمكن التعبـير عن H_1 و H_2 لكثـيرتي حدود سلَّميتين في A . ذلك لأنه إذا كانت $H_1 = g(A)$ فيجب أن يكون لدينا

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g(4) & g'(4) & 0\\0 & g(4) & 0\\0 & 0 & g(4)\end{bmatrix}.$$

ومن الـواضـح أن هذه العـلاقـة الأخـيرة مستحيلة باعتبـار أنه لا يمكن أن يكون $g(4) = 1$ و $g(4) = 0$ في الوقت نفسه .

وتدعى مجموعة من المصفوفات كتلك المبيَّنة في (99.2) مجموعة المصفوفات الجزئية متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقة لِـ A . ومثل هذه المجموعة ليست وحيدة، ذلك لأنه إذا كانت P أي مصفوفة غير شاذة تقبل التبادل مع A ، فعندئذ $P^{-1}AP = A$. وإذا كتبنا

$$P^{-1}H_1P = \breve{H}_1, \quad P^{-1}M_1P = \breve{M}_1; \quad P^{-1}H_2P = \breve{H}_2, \quad P^{-1}M_2P = \breve{M}_2,$$

فمن السهـل رؤية أن المجموعة $\breve{H}_1, \breve{M}_1, \breve{H}_2, \breve{M}_2$ تحقّق جميع العلاقات في (99.3) .
وعلى سبيل المثال، لتكن

$$P = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}, \quad \text{بحيث إن} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -8 & -3\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

فمن السهل التحقق من أن

$$\breve{H}_1 = \begin{bmatrix}1 & -6 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}, \quad \breve{M}_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$
$$\breve{H}_2 = \begin{bmatrix}0 & 6 & -3\\0 & 0 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}, \quad \breve{M}_2 = 0. \tag{99.4}$$

ونلاحظ هنا أن $\breve{M}_1 = M_1$. وهذا يعود لحقيقة أن M_1 هي في الواقع مصفوفة معدومة

القـوى رئيسـة. وبالتالي فإنه يمكن التعبير عنها كَكَثيرة حدود سلَّمية في A . ومنه، وباعتبار أن P تقبل التبادل مع A فهي تقبل التبادل مع M_1 ، وبالتالي تحوّل M_1 إلى نفسها.

وأعمّ مصفوفة غير شاذة P تقبل التبادل مع A في (99.1) هي :

$$P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix}, \qquad (ae \neq 0).$$

وهنا

$$P^{-1} = \left(\frac{1}{a^2 e}\right) \begin{bmatrix} ae & cd - be & -ac \\ 0 & ae & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{bmatrix},$$

ومنه نجد بعد حسابات بسيطة أن

$$\breve{H}_1 = P^{-1} H_1 P = \frac{1}{ae} \begin{bmatrix} ae & cd & ce \\ 0 & ae & 0 \\ 0 & -ad & 0 \end{bmatrix}, \tag{99.5}$$

$$\breve{H}_2 = P^{-1} H_2 P = \frac{1}{ae} \begin{bmatrix} 0 & -cd & -ce \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & ad & ae \end{bmatrix}, \breve{M}_1 = M_1, \breve{M}_2 = 0.$$

ومنه يتَّضح وجود ما لا نهاية له من المجموعات الجزئية متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقة لِـ A .

ومجموعتان من هذا النوع لا تقبلان التبادل بالضرورة. وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا H_1 كما في (99.2) و $\breve{H}_1$ كما في (99.4) فإن $H_1\breve{H}_1 \neq \breve{H}_1 H_1$.

وفي هذه الحـالة حيث A متردّية، يمكن استخدام المصفوفات الجزئية الموافقة لِـ A للحصول على حلول للمعادلة $\pi(X) = A$ ، أعم من تلك التي حصلنا عليها في الفقرة ٧٩ مستخدمين المصفوفات الرئيسة متساوية القوى ومعدومة القوى. ولنعتبر على سبيل المثال، المعادلة

$$X^2 = A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \qquad (99.6)$$

فالمصفوفتان متساوية القوى الرئيسة ومعدومة القوى الرئيسة هنا هما

$$E = I, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

بحيث يكون $A = 4I + N$. ولدينا وفقًا لطريقة الفقرة ٨٠ :

$$X = A^{1/2} = \pm 2\left(I + \frac{N}{4}\right)^{1/2} = \pm 2\left(I + \frac{N}{8}\right) = \pm\left(2I + \frac{N}{4}\right).$$

ومنه

$$X = \pm \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

وعلى الوجه الآخر فقد تبيَّن أنه يمكن استخدام المصفوفات في (99.4) كمجموعة من المصفوفات الجزئية الموافقة لِـ A في (99.6). ويمكن أن نكتب عندئذ

$$A = 4\check{H}_1 + \check{M}_1 + 4\check{H}_2 = 4\check{H}_1\left(1 + \frac{\check{M}_1}{4}\right) + 4\check{H}_2.$$

ومنه

$$\begin{aligned} A^{1/2} &= \pm 2\check{H}_1\left(1 + \frac{\check{M}_1}{4}\right)^{1/2} \pm 2\check{H}_2 \\ &= \pm 2\left(\check{H}_1 + \frac{\check{M}_1}{4}\right)^{1/2} \pm 2\check{H}_2 \\ &= \pm\left(2\check{H}_1 + \frac{\check{M}_1}{4}\right) \pm 2\check{H}_2. \end{aligned}$$

وإذا استخدمنا الإشارات العليا في الحد الأول والدنيا في الآخر وعوَّضنا المصفوفات المعطاة في (99.4) ، نجد:

$$X = A^{1/2} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{95}{4} & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

ومن السهـل التحقق من أن $X^2 = A$ ، ويتَّضـح أن X ليست كثـيرة حدود في A . وباستخدام مجموعات مختلفة من المصفوفات الجزئية متساوية القوى ومعدومة القوى، تتضح إمكانية الحصول على ما لا نهاية له من الحلول الأخرى للمعادلة المفروضة. وفي الحقيقـة من أجـل مصفـوفة A متردّية، يمكن تحديد كامل دراسة المعادلات الجبرية السلَّمية $\omega\,(X) = A$ بدلالـة مجموعة من المصفوفات الجزئية متساوية القوى والجزئية معدومة القوى، وليس بدلالة المصفوفات الرئيسة متساوية القوى والرئيسة معدومة القوى.

١٠٠ ـ البرهان على عدم صحَّة حدس (Conjecture)

في بداية دراستنا للمصفوفات عرضنا حدسًا يقول: إنه إذا كانت مصفوفتان A و B قابلتـين للتبـادل فيمكن التعبير عن إحداهما ككثيرة حدود سلَّمية في الأخرى. وسرعان ما وجدنا أن مثل هذا الحدس خاطيء، وذلك كما يتبيَّن من المثال البسيط.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (100.1)$$

ومؤخـرًا عرضنـا حدسًـا يقول: إنه إذا كانت A و B تقبلان التبادل، فيجب أن يكون ممكنًا التعبير عن كل منهما ككثيرة حدود سلَّمية في مصفوفة ثالثة C . وهذا الحدس خاطيء أيضًـا. ذلـك لأنـه من السهـل التحقق من أن المصفـوفة الوحيدة C التي تقبل الـتبـادل مع كـل مـن A و B في (100.1) هي مـن الـنـوع $C = aI + D$ ، حيـث

$D = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$ ، باعتبـار أن $D^2 = 0$ ، ويمكن التعبـير عن أعم كثيرة حدود سلَّمية

في C على الـشـكـل $C = xI + yD$. ونـسـتـنـتـج من $xI + yD = A$ أن $x = 0$ ، $by = 1$ ، $dy = 0$ ، وبـالتـالي $d = 0$. وبصورة مماثلة، نستنتج من $x'I + y'D = B$ أن $x' = 0$ ، $by' = 0$ و $dy' = 1$. ومن الـواضح أن هذا الشرط الأخير مستحيل، باعتبار أن $d = 0$.

وقد يتراءى لنا أنه يمكن التعبير عن كل مصفوفة X تقبل التبادل مع A على شكل كثيرة حدود في مجموعة ما من المصفوفات الجزئية الموافقة لِـ A . ولكن هذا خاطيء أيضًا. ذلك لأن أعم مجموعة من المصفوفات الجزئية الموافقة لِـ A هي $\breve{H}_1, \breve{M}_1, \breve{H}_2$ المذكورة في (99.5) وأعم كثيرة حدود في هذه المصفوفات هي من الشكل

$$S = k\breve{H}_1 + l\breve{H}_2 + m\breve{M}_1,$$

ويمكن كتابتها على الشكل

$$S = \frac{1}{ae}\begin{bmatrix} kae & (k-l)cd + mae & (k-l)ce \\ 0 & kae & 0 \\ 0 & (l-k)ad & lae \end{bmatrix}, \qquad (ae \neq 0).$$

ومن الواضح الآن أن المصفوفة

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تقبل التبادل مع A . ولكن $S \neq X$ بصرف النظر عن اختيارنا للوسطاء، ذلك لأننا نجد من الحدود القطرية أن $k = l = 1$. وعندئذ تعطي المساواة بين العناصر في الموضع (1,3) أن $0\,(\frac{c}{a}) = 1$ ، وهذا مستحيل.

نظريـة (١٠٠ - ١)

إذا كانت A مصفوفة متردِّية وكانت X تقبل التبادل مع A ، فليس من الممكن أن نعبِّر دائمًا عن X ككثيرة حدود في أي مجموعة من المصفوفات الجزئية متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقة لِـ A .

١٠١ - مجموعات المصفوفات المثلثة

لتكن $A, B, C, \ldots$ مصفوفات عناصرها في حقل الأعداد المركبة $\mathscr{F}$. لنتذكر من الفقرة **٣٤** أننا نقول: إن المصفوفة مثلثة إذا كانت جميع عناصرها الواقعة فوق القطر أو جميع عناصرها الواقعة تحت القطر مساويةً للصفر. ونعلم من النظرية (**٣٤ - ١**) أنه إذا كانت A أي مصفوفة مربّعة فتوجد مصفوفة واحديّة U بحيث تكون U^*AU مثلَّثة. وإذا كانت U بحيث تصبح في الوقت نفسه كل من U^*AU و U^*BU مثلَّثة، فسنقول عندئذ: إن A و B تمتلكان خاصة المثلث. ومن الواضح أن عناصر القطر في مصفوفة مثلثة هي بالذات جذورها المميَّزة. لتكن

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \beta_2 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$$

مصفوفتين مثلثتين. فمن الواضح أنه إذا كان k و l أي عددين سلَّميين، فإن الجذور المميَّزة لِـ $k\,A + l\,B$ هي بدقة $k\,\alpha_i + l\,\beta_i$ و $(i = 1, 2, .., n)$. وأكثر من ذلك، فمن السهل التحقق من أن AB أيضًا هي مصفوفة مثلثة جذورها المميَّزة

$$\alpha_1\beta_1, \alpha_2\,\beta_2, \ldots, \alpha_n\beta_n.$$

والآن كل كثيرة حدود سلَّمية $f(\lambda, \mu)$ في متغيرين λ, μ هي تركيب خطِّي في جداءات قوى λ و μ . وبالتالي فإن الجذور المميَّزة لِـ $f(A, B)$ هي بدقة $f(\alpha_1, \beta_1), f(\alpha_2, \beta_2), \ldots, f(\alpha_n, \beta_n)$.

وهكذا نكون قد برهنّا النظرية التالية:

نظريـة (١٠١ ـ ١)

إذا كانت A و B مصفـوفتـين مثلثتـين جذورهمـا المميَّزة هي، على الـترتيب، $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ و $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ، وكـانت $f(\lambda, \mu)$ كثـيرة حدود سلَّمية في λ و μ . فيمكن دائمًا أن نتخذ أزواجًا من α_i و β_i بحيث تكون الجذور المميَّزة لِـ $f(A, B)$ هي $f(\alpha_1, b_1), f(\alpha_2, b_2), \ldots, f(\alpha_n, \beta_n)$.

ومن الواضح أنه يمكن تعميم هذه النظرية بصورة مباشرة لمجموعة تضم أي عدد من المصفوفات المثلثة.

وبما أن الجذور المميَّزة لِـ A ، B و $f(A, B)$ لا تتغير من خلال تحويل واحدي U^*AU فلدينا النتيجة:

نتيجـة (١٠١ ـ ٢)

لتكن A و B مصفـوفتـين جذورهما المميَّزة هي $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ و $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ، على الترتيب، ولنرمز بـ $f(\lambda, \mu)$ لأي كثيرة حدود في λ و μ . إذا كان للزوج A و B خاصة المثلث، فيمكن دائمًا اتخاذ أزواج من الجذور α والجذور β بحيث تكون الجذور المميَّزة لِـ $f(A, B)$ ، هي على وجه الدقة، $f(\alpha_1, \beta_1), f(\alpha_2, \beta_2), \ldots, f(\alpha_n, \beta_n)$.

ونبرهن الآن النظرية:

نظريـة (١٠١ ـ ٣)

إذا كانت A و B مصفوفتين قابلتين للتبادل فيمتلك عندئذ الزوج A, B خاصة المثلث، أي أنه توجد مصفوفة واحديّة U بحيث تكون كل من المصفوفتين U^*AU و U^*BU مصفوفة مثلثة.

ونحتاج أولاً للتمهيدية التالية:

تمهيديـة (١٠١ ـ ٤)

يكـون لمصفـوفتـين A و B قابلتـين للتبـادل متّجه لا متغيّر مشترك واحد على الأقـل، أي أنـه يوجـد دائمًا متّجه عمود غير الصفر $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ بحيث إن $AX = \alpha X$ ، $BX = \beta X$ ، حيث α و β جذران مميَّزان لِـ A و B ، على الترتيب.

إذا كان α جذرًا مميَّزًا لِـ A وكـانت τ صفـرية $A - \alpha I$ ، فيوجـد فضاء متّجهات خطّي Γ من المتّجهـات X ، له من الأبعـاد τ ، وبحيث يكـون $AX = \alpha X$. لتكن

$X_1, X_2, \ldots, X_\tau$ بحيث تشكّل أساسًا لهذا الفضاء. من الشرط $AB = BA$ لدينا:

$$ABX_i = BAX_i = B\alpha X_i = \alpha BX_i,$$

ومنه

$$(A - \alpha I)\, BX_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, \tau) \qquad (101.1)$$

ويتّضح من هذه العلاقة أن كلاًّ من المتّجهات BX_i ينتمي إلى فضاء المتّجهات الخطّي Γ. وبالتالي يوجد τ^2 من الأعداد السلّمية k_{ij} بحيث إن

$$BX_1 = k_{11}X_1 + \ldots + k_{1\tau}X_\tau.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (101.2).\ (\text{مصفوفة } K)$$

$$BX_\tau = k_{\tau 1}X_1 + \ldots + k_{\tau\tau}X_\tau.$$

لتكن β جذرًا مميَّزًا لِـ K. فعندئذ يوجد متّجه $(c_1, c_2, \ldots, c_\tau)$ بحيث إن

$$k_{11}c_1 + \ldots + k_{\tau 1}c_\tau = \beta\, c_1.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (101.3)$$

$$k_{1\tau}c_1 + \ldots + k_{\tau\tau}c_\tau = \beta\, c_\tau.$$

والآن لنضرب المعادلات (101.2) في $c_1, c_2, \ldots, c_\tau$، على الترتيب، ثم نجمعها فنجد:

$$B(c_1X_1 + \cdots + c_\tau X_\tau) = \beta c_1X_1 + \cdots + \beta c_\tau X_\tau. \quad (101.4)$$

وإذا وضعنا $Y = c_1X_1 + \ldots + c_\tau X_\tau$، فلدينا

$$BY = \beta Y,$$

بحيث يكون Y متّجهًا لا متغيرًا من متّجهات B. وفضلاً عن ذلك، فمن الواضح أن Y متّجه لا متغيّر من متّجهات A باعتبار أنه واقع في فضاء المتّجهات الخطّي Γ وبهذا بُرهنت التمهيدية.

ونمضي الآن إلى برهان النظرية الرئيسة (١٠١ ـ ٣). لنستخدم الاستقراء بالنسبة لمرتبة المصفوفة n، فأول ما نلاحظه عندئذ أنه إذا كان $n = 1$، فإن المصفوفتين $A = (\alpha)$: $|X|$ و $B = (\beta)$ هما مصفوفتان مثلثتان. أو يمكن اعتبارهما وقد حُوِّلتا إلى الشكل المثلث بوساطة المصفوفة الواحدية (1). ونفرض الآن أن النظرية صحيحة من أجل مصفوفتين مربّعتين $(n-1) \times (n-1)$ قابلتين للتبادل A_1 و B_1، ثم نبرهن أنها صحيحة من أجل مصفوفتين مربّعتين $n \times n$ قابلتين للتبادل A و B.

وبـالاستنـاد إلى التمهيدية نجد أن للمصفوفتين القابلتين للتبادل A و B متّجهًا لا متغـيّرًا واحدًا على الأقل $[v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{n1}]$ مشتركًا فيما بينهما. نعيد الآن هذا المتّجه إلى الشكـــل النـاظمي، في حالـة الضرورة، وذلـك بقسمـة كل من مركّبـاتـه على $\sqrt{\Sigma v_{i1}\bar{v}_{i1}}$ ، ونستخدم المتّجه الناتج كأول عمود من مصفوفة واحديّة V . ويمكن ملء الأعمدة الباقية بعدة طرق إذا كان $n > 2$. والعمود الأول من المصفوفة AV هو المتّجـه العمـود $[\alpha v_{11}, \alpha v_{21}, \ldots, \alpha v_{n1}]$ ، ومنه وبالاستناد إلى خواص معروفة جيدًا للمصفوفة الواحديّة، نستنتج أن

$$V^*AV = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]. \tag{101.5}$$

وبما أن العمود الأول من V هو أيضًا متّجه لا متغير لِـ B ، فنستنتج أيضًا أن

$$V^*BV = \left[\begin{array}{c|ccc} \beta & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & B_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]. \tag{101.6}$$

وتشير العناصر x في الصف الأول هنا إلى عناصر غير محدَّدة، بينما A_1 و B_1 مصفوفتان مربّعتان $(n-1) \times (n-1)$.

ومن هاتين العلاقتين الأخيرتين نجد بحساب سهل أن

$$V^*ABV = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha\beta & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1B_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right], \quad V^*BAV = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha\beta & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_1A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right], \tag{101.7}$$

ومنه وباعتبار أن $AB = BA$ نجد أن $A_1B_1 = B_1A_1$. وبما أن A_1 و B_1 يقبلان التبادل فوفقًا للفرض الاستقرائي توجد مصفوفة واحديّة W_1 مربّعة $(n-1) \times (n-1)$ بحيث تكون $W_1^*A_1W_1$ و $W_1^*B_1W_1$ مثلثتين. إذا وضعنا $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_1 \end{bmatrix}$ ووضعنا $U = V\,W$ ، فنستنتج أن المصفوفتين U^*AU و U^*BU كليهما مصفوفتان مثلثتان، وهو المطلوب.

ويمكن تعميم نتائج هذه الفقرة لمجموعة تضم أي عدد من المصفوفات $A_1, A_2, \ldots, A_m$ التي تقبل التبادل أزواجًا أزواجًا. وإذا اتّبعنا خط النقاش نفسه المتّبع في حالة مصفوفتين، فيتضح أنّه سيكون كافيًا البرهان على أن لـ m من المصفوفات متّجهًا لا متغيرًا واحدًا على الأقل مشتركًا فيما بينها. وسنبرهن هذه العبارة بالاستقراء علمًا أنها برهنت لِتَوِّها من أجل $m = 2$.

لنفرض الآن أن لـ $m - 1$ من المصفوفات $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ متجهًا لا متغيّرًا مشتركًا X_1 ، ولنفرض أن هذا المتجه ينبثق عن الجذر المميِّز $\alpha^{(1)}$ لـ A_1 ، $\alpha^{(2)}$ لـ A_2 ، و $\alpha^{(m-1)}$ لـ A_{m-1} . فعندئذ

$$A_j X_1 = \alpha^{(j)} X_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1) \qquad (101.8)$$

ومن أجل الجذور $\alpha^{(j)}$ نفسها، قد تتحقق المعادلات (101.8) من أجل $\tau > 1$ من المتّجهات المستقلة خطّيًّا. ولدينا عندئذ فضاء متّجهات خطّي Γ له τ من الأبعاد ومتّجهاته تحقّق (101.8) . وإذا شكّلت $X_1, X_2, \ldots, X_\tau$ أساسًا لـ Γ ، فلدينا

$$A_j A_m X_i = A_m A_j X_i = \alpha^{(j)} A_m X_i,$$

ومنه

$$(A_j - \alpha^{(j)} I)\, A_m X_i = 0, \quad (i = 1, \ldots, \tau; j = 1, \ldots, m-1)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة يتّضح أن الـ τ من المتّجهات A_mX_i تنتمي إلى فضاء المتّجهات الخطّي Γ الذي يضم $X_1, X_2, \ldots, X_\tau$ كأساس، وبالتالي، وتمامًا كما رأينا في برهان التمهيدية (١٠١ ـ ٤)، يوجد متّجه

$$Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_\tau X_\tau,$$

بحيث يكون $A_mY = \alpha^{(m)}\, Y$. وفضلاً عن ذلك، وباعتبار أن Y هو متّجه من الفضاء Γ ، فلدينا أيضًا $A_iY = \alpha^{(i)}\, Y$.

وهكذا نجد النظرية :

نظريـة (١٠١ ـ ٥)

لتكن $A_1, A_2, \ldots, A_m$ مجمـوعـة تحوي m من المصفـوفـات المـربّعـة $n \times n$ القـابلة للتبـادل فيما بينها وعنـاصرهـا في حقـل، ولتكن الجـذور المميَّزة لِـ A_i هي $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_n^{(i)}$. فيمكن إقـامـة توافق بين جذور الـ m مصفـوفـة بحيث إنه إذا كانت $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ كثـيرة حدود سلَّمية في الـ m من المتغـيرات $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ، فإن الجـذور المـميَّزة لِـ $f(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ هي $f(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_1^{(m)})$ ، . . . ، $f(\alpha_n^{(1)}, \alpha_n^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(m)})$.

١٠٢ ـ المصفوفات شبه التبادلية

تعريـف

لنـرمز بـ A و B لمصفوفتين مربّعتين $n \times n$ وليكن $AB - BA = C$. إذا كان $CA = AC$ و $CB = BC$ فتدعى A و B مصفوفتي ماك كوي شبه التبادليتين .

ويتضـح من التعـريـف أن مصفـوفتين A و B قابلتان للتبادل بالمعنى العادي للكلمة تكونان أيضًا شبه تبادليتين .

ونبرهن الآن التمهيدية التالية :

تمهيديـة (١٠٢ ـ ١)

يكون لمصفوفتين A و B شبه تبادليتين دائمًا متّجه لا متغير واحد على الأقل .

ليكن γ جذرًا مميَّزًا لِـ C . إذا كانت τ هي صفـرية $C - \gamma I$ ، فيوجـد فضاء متّجهات خطّي Γ ذو τ من الأبعاد، بحيث إن كل متّجه X_i من الفضاء يحقّق المعادلة

$$CX_i = \gamma X_i. \tag{102.1}$$

لتكن المتّجهات $X_1, X_2, \ldots, X_\tau$ أساسًا للفضاء Γ . فعندئذ يحقّق كل متّجه X_i العلاقة (102.1) ، وعـلى العكس يمكن التعبـير عن كل حل لِـ (102.1) كتركيب خطّي في المتّجهات X .

ومن العلاقة $CA = AC$ نحصل على

$$CAX_i = ACX_i = A\gamma X_i,$$

ومنه

$$(C - \gamma I)\, AX_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \tau) \tag{102.2}$$

ومن هذه المعادلة نرى أن المتّجهات AX_i تقع ضمن الفضاء Γ . وبالتالي يوجد τ^2 من الثوابت k_{ij} بحيث إن

$$AX_1 = k_{11}X_1 + \ldots + k_{1\tau}X_\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(مصفوفة K)}$$

$$AX_\tau = k_{\tau 1}X_1 + \ldots + k_{\tau\tau}X_\tau.$$

أو

$$AX_i = \sum k_{ij}X_j \quad (i = 1, 2, \ldots, \tau). \tag{102.3}$$

وبطريقة مشابهة تمامًا نستنتج وجود τ^2 من الثوابت l_{ij} بحيث إن

$$BX_i = \sum_j l_{ij}X_j \quad (i = 1, 2, \ldots, \tau). \tag{102.4}$$

وإذا ضربنا طرفي (102.4) على اليسار في A واستخدمنا (102.3) نجد

$$ABX_i = \sum l_{ij}AX_j = \sum l_{ij}k_{jt}X_t,$$

بينما نحصل بصورة مشابهة من (102.3) على

$$BAX_i = \sum k_{ij}l_{jt}X_t$$

وبطرح المعادلتين الأخيرتين طرفًا من طرف واستخدام (102.1) نجد

$$\gamma X_i = \sum_{t=1}^{\tau} (l_{ij}k_{jt} - k_{ij}l_{jt})\, X_t \quad (i = 1, 2, \ldots, \tau)$$

ولدينا هنا τ من العلاقات الخطّية التي تربط بين الـ τ من المتّجهات $X_1, \ldots, X_\tau$. وبالتالي، وباعتبار أن هذه المتّجهات الأخيرة مستقلة خطّيًا، فيجب أن تحقّق K و L الشرط

$$LK - KL = \gamma I \tag{102.5}$$

والآن وقد عرَّفنا أثر مصفوفة مربّعة P بأنه مجموع العناصر القطرية في المصفوفة، فهذا يساوي وفقًا للنظرية (٢٧ ـ ١) مجموع الجذور المميَّزة لـ P . ومن الواضح أن أثر $(P - Q)$ يساوي أثر P ناقصًا أثر Q . وبالتالي، وباعتبار أن النظرية (٦٤ ـ ١) تفيد بأن الجذور المميَّزة لـ KL هي الجذور المميَّزة لـ LK نفسها، فنستنتج أن أثر $LK - KL$ هو الصفر. وبما أن أثر المصفوفة γI المربّعة $\tau \times \tau$ والمذكورة في (102.5) هو $\tau\gamma$ ، فنستنتج

أن $\gamma = 0$. وبالتالي فإن المصفوفتين K و L قابلتان للتبادل .

وبما أن γ جذر مميَّز نموذجي لِـ C فنستنتج من النظرية (٧٠ ـ ١) أن C معدومة القوى .

نظريـة (١٠٢ ـ ٢)

إذا كانت A و B زوجًا من المصفوفات شبه التبادلية وفقًا لماك كوي ، فيجب أن تكون $AB - BA$ عندئذ معدومة القوى .

ولكن يمكن الذهاب إلى أبعد من ذلك . فبما أن K و L يقبلان التبادل فإن لهما، وفقًا للتمهيدية (١٠١ ـ ٤)، متجهًا لا متغيرًا مشتركًا $V = [v_1, v_2, \ldots, v_\tau]$ بحيث إن

$$\sum k_{ij} v_i = \alpha v_j ; \qquad \sum l_{ij} v_i = \beta v_j , \qquad (102.6)$$

حيث α و β جذران مميَّزان لِـ K و L ، على الترتيب .

بضرب (102.3) في v_i والجمع فوق i نجد، مستفيدين من (102.6) ، أن

$$A \sum v_i X_i = \sum_i \sum_j k_{ij} v_i X_j = \alpha \sum v_j X_j .$$

وبالتالي فإن المتجه $\sum v_j X_j$ هو متجه لا متغير من متجهات A ناشيء عن الجذر المميَّز α لِـ K ، ونرى أن مثل هذا الجذر هو جذر مميَّز لِـ A أيضًا . وبطريقة مشابهة نستنتـج من المعادلة (102.4) أن هذا المتجه نفسه هو متجه لا متغير من متجهات B ناشيء عن الجذر المميَّز β لِـ B . وهو المطلوب .

ونبرهن الآن

نظريـة (١٠٢ ـ ٣)

إذا كان A و B زوجًا من المصفوفات شبه التبادلية ، فتوجد مصفوفة واحديّة U بحيث إن كلًّا من U^*AU و U^*BU هي مصفوفة مثلثة .

برهان هذه النظرية مطابق تقريبًا لبرهان النظرية (١٠١ ـ ٣) . وعلينا أن نبيِّن فقط أنـه إذا كانت V^*AV و V^*BV في (101.5) و (101.6) مصفـوفتـين شبه تبادليتين

فكذلك أيضًا تكون A_1 و B_1 .

ولبيان هذا نلاحظ أولاً أن

$$V^*CV = V^*(AB - BA)V = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & x & x & x \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & A_1B_1 - B_1A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & x & x & x \\ \hline \vdots & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

وبالتالي

$$V^*CAV = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C_1A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right], \quad V^*ACV = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & x & x & x \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1C_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

ونستنتج أنه إذا كانت $AC = CA$ ، فعندئذ $A_1C_1 = C_1A_1$ أيضًا. وبصورة مشابهة إذا كانت $BC = CB$ فعندئذ أيضًا $B_1C_1 = C_1B_1$. ومنه وباعتبار أن A و B مصفوفتان شبه تبادليتين فكذلك أيضًا تكون A_1 و B_1 . والمناقشة المتعلقة بالاستقراء يمكن استخدامها إذن كما في الفقرة ١٠١ .

نظريـة (١٠٢ ـ ٤)

لنرمز بـ A و B لمصفوفتين مربّعتين $n \times n$ شبه تبادليتين جذورهما المميَّزة هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ و $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ، على الترتيب، إذا كانت $f(\lambda, \mu)$ أي كثيرة حدود سلَّمية في λ و μ ، فيمكن دائـمًا اتخاذ أزواج من α_i و β_i بحيث إن الجذور المميَّزة لِـ $f(A, B)$ هي $f(\alpha_1, \beta_1), f(\alpha_2, \beta_2), \ldots, f(\alpha_n, \beta_n)$.

تماريـــن

١) حدِّد من أجل كل من الأزواج التالية من المصفوفات ما إذا كان لِـ A و B متّجه لا متغير مشترك أم لا ، وما إذا كان ممكنًا إيجاد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون كل من $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ مثلثة :

(ا) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};$

(ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$

(جـ) $A = \begin{bmatrix} 17 & 42 \\ -6 & -15 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -2 \end{bmatrix};$

(د) $A = \begin{bmatrix} -35 & 68 \\ -20 & 39 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 20 & -36 \\ 11 & -20 \end{bmatrix}.$

٢) بيِّن أن زوجًا A و B من المصفوفات 2×2 لا يمكن أن تكون شبه تبادلية دون أن تكون في الواقع تبادلية.

٣) بيِّن أنه إذا كان A و B زوجًا من المصفوفات المربّعة $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ شبه التبادلية، فلا يمكن أن تكون المصفوفة $AB - BA = C$ غير متردّية.

٤) حدِّد أيًّا من الأزواج التالية من المصفوفات A, B، في حال وجود أي منها، يتصف بأنـه شبه تبادلي ومن أجل كل زوج كهذا حدِّد، في حال الإمكان، مصفوفة P بحيث تكون $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ مثلثة.

(ا) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

(ب) $A = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix};$

(جـ) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & w & x \end{bmatrix}$

٥) لتكن A و B شبه تبادلية وليكن

$$G = \alpha A + \beta B + \gamma I, \qquad H = \lambda A + \mu B + \nu I,$$

حيث تمثّل الحروف الإغريقية أعدادًا سلّمية. بيِّن أن G و H شبه تبادليتين، أو ربما تبادليتين.

٦) من أجل كل من المصفوفات A التالية، أوجد أساسًا لفضاء متّجهات خطّي Γ مؤلّف من جميع المصفوفات X بحيث إن $AX = XA$:

$$(\text{ب})\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (\text{ا})\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\text{جـ})\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٧) من أجل كل من الأزواج التالية A, B من المصفوفات التبادلية، أوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث تكون كل من $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ مثلثتين:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \qquad (\text{ا})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (\text{ب})$$

٨) لنرمز بـ A و B لمصفوفتين مربّعتين $n \times n$ ولنفرض أن مصفوفة P معروفة بحيث إن $P^{-1}AP = B$. إذا كان $Y = P^{-1}XP$، بيِّن أنه عندما تفترض X جميع المصفوفات

التي تحقّق $AX = XA$ فعندئذ تفترض Y جميع المصفوفات التي تجعل $BY = YB$.

٩) لنرمز بِـ A و B لزوج من المصفوفات التبادلية جذورهما المميَّزة المختلفة هي $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ و $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ ، على الترتيب. إذا كان $t \geqslant s$ ، فبيِّن أن لِـ A و B على الأقل t من المتّجهات اللامتغيّرة المشتركة.



الفصل العشرون

أنظمة من
المعادلات التفاضليّة

١٠٣ - تفاضل وتكامل مصفوفة

لتكن A مصفوفة $m \times n$ عناصرها a_{ij} دوال قابلة للتفاضل في متغيّر سلّمي t . فنعرف عندئذ مشتق A بالنسبة لِـ t على أنه المصفوفة $m \times n$:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{d(a_{ij})}{dt}\right). \tag{103.1}$$

وبصورة مماثلة إذا كانت المقادير a_{ij} دوال في t قابلة للتكامل فوق الفترة (t_0, t). فنعرف

$$\int_{t_0}^{t} A dt = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij} dt\right).$$

وعلى أساس التعريف (103.1) تسهل رؤية أنه إذا كان A' منقول A فإن

$$\frac{dA'}{dt} = \left(\frac{dA}{dt}\right)';$$

وأيضًا

$$\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}. \tag{103.2}$$

إذا كانت A مصفوفة $m \times n$ و B مصفوفة $n \times q$ بحيث إن $C = AB$ هي مصفوفة $m \times q$ ، فلدينا من العلاقة

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

وباستخدام القواعد المألوفة في الحساب التفاضلي

$$\frac{dc_{ij}}{dt} = a_{i1}\frac{db_{1j}}{dt} + a_{i2}\frac{db_{2j}}{dt} + \cdots + a_{in}\frac{db_{nj}}{dt} + \frac{da_{i1}}{dt}b_{1j} + \frac{da_{i2}}{dt}b_{2j} + \cdots + \frac{da_{in}}{dt}b_{nj},$$

وبالتالي لدينا العلاقة

$$\frac{d(AB)}{dt} = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B. \qquad (103.3)$$

ولدينا من العلاقة $AA^{-1} \equiv I$ وباستخدام (103.3):

$$A\frac{dA^{-1}}{dt} + \frac{dA}{dt}A^{-1} \equiv 0,$$

ومنه

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}. \qquad (103.4)$$

١٠٤ - مجموعات المعادلات التفاضلية الخطِّية بمعاملات ثابتة

لنعتبر نظام المعادلات:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t),\\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{aligned} \qquad (104.1)$$

حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي دوال مجهولة في متغير سلّمي t ، والرموز f هي دوال معروفة في t ، والـ a_{ij} ثوابت. إذا رمزنا بـ X و $F(t)$ ، على الترتيب، للمتّجهين العمودين:

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad F(t) = [f_1, f_2, \ldots, f_n] \qquad (104.2)$$

وبـ A للمصفوفة (a_{ij}) المربّعة $n \times n$ ، فيمكن كتابة نظام المعادلات بالشكل المصفوفاتي

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(t). \qquad (104.3)$$

لنطبّق الآن على المتغيّرات X التحويل الخطّي غير الشاذ

$$X = PY, \qquad (104.4)$$

حيث $P = (p_{ij})$ مصفوفة غير شاذة عناصرها ثابتة. فلدينا بالاستناد إلى (103.3):

$$\frac{dX}{dt} = P\frac{dY}{dt}; \qquad (104.5)$$

بحيث تصبح (104.3)

$$P\frac{dY}{dt} = APY + F(t),$$

ومنه

$$\frac{dY}{dt} = P^{-1}APY + P^{-1}F(t). \qquad (104.6)$$

ويمكننا إذن اختيار P بحيث تكون $P^{-1}AP$ أي مصفوفة مشابهة لِـ A . وكثيراً ما يكون من المناسب أن نأخذ $P^{-1}AP$ كصيغة جوردان القانونية لِـ A .

وعلى سبيل المثال، إذا كان $n = 5$ والقواسم الابتدائية لِـ $\lambda I - A$ هي $(\lambda + 1)^2$ و $(\lambda - 2)^3$ ، فيمكن كتابة نظام المعادلات (104.6) على الشكل:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt} &= 2y_1 + y_2 + \phi_1(t), & \frac{dy_4}{dt} &= -y_4 + y_5 + \phi_4(t),\\
\frac{dy_2}{dt} &= 2y_2 + y_3 + \phi_2(t), & \frac{dy_5}{dt} &= -y_5 + \phi_5(t), \qquad (104.7)\\
\frac{dy_3}{dt} &= 2y_3 + \phi_3(t); & &
\end{aligned}$$

ومن المعادلة الثالثة من هذه المعادلات، نحصل على y_3

$$y_3 = e^{2t}\int e^{-2t}\phi_3(t)\,dt + c_3e^{2t}.$$

ونبدِّل الآن هذه القيمة لِـ y_3 في المعادلة الثانية فنجد y_2 ، ثم نجد عندئذ y_1 من المعادلة الأولى. وبصورة مشابهة نحصل على y_5 و y_4 من المعادلتين الخامسة والرابعة.

يبقى علينا إيجاد X ، ومن أجل ذلك نحتاج إلى معرفة المصفوفة P في (104.4) التي نختزل بوساطتها A إلى صيغة جوردان القانونية. لنتذكّر أن طريقة إيجاد P في الحالة العامة معطاة في الفقرة ٨٧.

وفيما يلي طريقة أخرى لحل نظام المعادلات (104.1):

ليكن α جذراً مميزاً لِـ A وليكن $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ متجه صف لا متغيّر لِـ A يوافق α ، بحيث يكون

$$KA = \alpha K.$$

أو بعبارة أخرى

$$\sum_i a_{ij}k_i = \alpha k_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

لنضرب طرفي المعادلة الأولى من المعادلات المعطاة في k_1 ، الثانية في k_2 ، . . . ، والمعادلة n في k_n ولنجمع فنجد:

$$\frac{d}{dt}(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n) = \alpha(k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n) + \sum k_i f_i(t)$$

وإذا كتبنا

$$z = k_1x_1 + k_1x_2 + \ldots + k_nx_n,$$

فنجد بعد المكاملة:

$$z = e^{\alpha t}\int e^{-\alpha t} \sum k_i f_i(t)\, dt + ce^{\alpha t}.$$

وإذا كان $k_n \neq 0$ فنحلّ هذه المعادلة الأخيرة من أجل x_n وذلك بدلالة $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. ثم نبدِّل عندئذ هذه القيمة لِـ x_n في المعادلات (104.1) ، فنحصل هكذا على $n-1$ من المعادلات في المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

وكتوضيح لنأخذ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $X = [x_1, x_2, x_3]$ و $F(t) = [0, -e^{2t}, 0]$

ونظام المعادلات هو عندئذ:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + x_3,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2 - x_3 - e^{2t}, \qquad (104.8)$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3.$$

والدالة المميِّزة لِـ A هي $(1-\lambda)^3$ ، وفي مقابل الجذر 1 نجد أنّ المتّجه اللامتغيّر لِـ A' هو $K = (1, -1, 1)$. وبضرب المعادلات الأولى والثانية والثالثة في (104.8) في 1 ، -1 و 1 على الترتيب، ثم الجمع نجد:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2 + x_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + e^{2t}$$

ومنه نجد بالمكاملة :

$$x_1 - x_2 + x_3 = e^{2t} + c_1 e^t,$$

وبالتالي

$$x_3 = -x_1 + x_2 + e^{2t} + c_1 e^t. \tag{104.9}$$

وإذا عوضنا هذه العبارة من أجل x_3 في المعادلتين الأولى و الثانية من المعادلات المفروضة نجد :

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + e^{2t} + c_1 e^t,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + x_2 - 2e^{2t} - c_1 e^t.$$

وأول هاتين المعادلتين تقبل التكامل مباشرة وتعطي

$$x_1 = e^{2t} + c_1 t\, e^t + c_2 e^t$$

وإذا عوَّضنا x_1 في المعادلة الثانية نحصل على معادلة قابلة للتكامل مباشرة من أجل x_2 وبعدها نجد x_3 من (104.9).

وطريقة ثالثة لحل مجموعة معادلات تفاضلية خطِّية كالمجموعة (104.1) هي عن طريق استخـدام الصيغة القانونية القياسية لِـ A . وهكذا إذا كانت A مصفوفة غير متردِّية دالتها المميَّزة

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

فإن الصيغة القانونية القياسية معطاة في (69.2). والآن إذا كانت P مصفوفة غير شاذة بحيث إن $P^{-1}AP = R$ ، ووضعنا $X = PY$ ، فإن المعادلة التفاضلية المصفوفاتية من أجل إيجاد Y هي

$$\frac{dY}{dt} = RY + P^{-1}F(t).$$

إذا وضعنا $P^{-1}F(t) = G(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)]$ فالمعادلات هي :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 + g_1(t),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_3 + g_2(t), \cdots, \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n + g_{n-1}(t), \tag{104.10}$$

$$\frac{dy_n}{dt} = -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \cdots - a_1 y_n + g_n(t).$$

وإذا اكتفينا مؤقتًا بالحالة التي يكون فيها $F(t) = 0$ ، فنرى مباشرة أن آخر هذه المعادلات تقود إلى المعادلة التفاضلية الخطّية المتجانسة من المرتبة n :

$$\frac{d^n y_1}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y_1}{dt^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy_1}{dt} + a_n y_1 = 0.$$

ويمكن إيجاد الحل العام لهذه المعادلة مباشرة بالطرق التي تشرحها الكتب المدرسية في المعادلات التفاضلية. وإذا دعينا هذا الحل y_1 فيتم إيجاد عبارات $y_2, y_3, \ldots, y_n$ بالمفاضلة.

لنفرض الآن أن A متردّية ولنفرض أن للمصفوفة $\lambda I - A$ الـ s من المتّجهات اللامتغيّرة $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_s(\lambda)$. وعندئذ بدلاً من الوصول إلى مجموعة واحدة من المعادلات التفاضلية كما في (104.10) فإننا نصل إلى s من مجموعات المعادلات من ذلك النوع، وليس بين أي مجموعتين متغير مشترك. وهكذا نكون قد وصلنا إلى مسألة من النوع الذي ناقشناه.

وهذه الطريقة غير مُرضية من حيث إنه بالرغم من قدرتنا على إيجاد Y بسهولة، فإنه يمكن إيجاد X فقط عندما تكون المصفوفة P معروفة بحيث إن $P^{-1}AP = R$.

وكتوضيح لنعد إلى مجموعة المعادلات الخطّية المتجانسة

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

التي حصلنا عليها من المجموعة في (104.8) عندما نضع في المعادلة الثانية 0 بدلاً من e^{2t} . فمن السهل التحقق من أنه إذا كان

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

فإن $P^{-1}AP = R$ ، حيث R هي الصيغة القانونية القياسية لـ A . وإذا قمنا بالتحويل $X = PY$ فإن المعادلات التفاضلية لإيجاد Y هي

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_3, \qquad \frac{dy_3}{dt} = y_1 - 3y_2 + 3y_3.$$

ومنها نجد

$$\frac{d^3y_1}{dt^3} = y_1 - 3\,\frac{dy_1}{dt} + 3\,\frac{d^2y_1}{dt^2}.$$

وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية خطِّية متجانسة من الرتبة الثالثة بمعاملات ثابتة، وحلّها وفقًا لطرق المعادلات التفاضلية الابتدائية هو

$$y_1 = c_1t^2e^t + c_2te^t + c_3e^t,$$

حيث الثوابت c كيفية. ونحصل الآن على y_2 و y_3 بالمفاضلة، فنجد:

$$y_2 = \frac{dy_1}{dt}, \qquad y_3 = \frac{dy_2}{dt},$$

وبالتالي فإننا نجد x_1، x_2 و x_3 من العلاقة $X = PY$.

١٠٥ ـ سلاسل القوى المصفوفاتية

لتكن

$$\pi(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \cdots + p_m\lambda^m + \cdots$$

سلسلة قوى معاملاتها p_i أعداد حقيقية أو مركّبة، وحيث λ متحول سلّمي فوق الحقل المركّب. لنعرّف

$$\pi_m(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} p_i\lambda^i, \tag{105.1}$$

ولنكتب

$$\pi_m(A) = \sum_{i=0}^{m} p_iA^i, \tag{105.2}$$

حيث A أي مصفوفة مربّعة $n \times n$ فوق الحقل المركّب. إذا تقارب كل من الـ n^2 عنصرًا في المصفوفة $\pi_m(A)$ إلى نهاية محدَّدة s_{ij} عندما $m \to \infty$، فنقول إن متسلسلة القوى المصفوفاتية $\pi(A)$ تتقارب إلى مصفوفة النهاية S. ومن الواضح أن متسلسلة قوى مصفوفاتية معيَّنة تتقارب بينما لا تتقارب مصفوفات أخرى. وعلى سبيل المثال، إذا كان

$$\pi(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^3}{4} + \cdots ,$$

فعندئذ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\pi(A) = \begin{bmatrix} \pi(2) & 0 \\ 0 & \pi(3) \end{bmatrix}, \qquad \pi(B) = \begin{bmatrix} \pi(1/2) & 0 \\ 0 & \pi(1/3) \end{bmatrix},$$

ومنه نرى أن متسلسلة القوى المصفوفاتية $\pi(A)$ لا تتقارب بينما تتقارب $\pi(B)$. وإذا لم تتقارب متسلسلة القوى المصفوفاتية $\pi(A)$ فنقول إنها تتباعد أو إنها متباعدة.

وفي الحالة العامة، لتكن الدالة المميِّزة المختزلة لِـ A هي

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{\nu_1}(\lambda - \alpha_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \alpha_s)^{\nu_s} \qquad (\sum \nu_i = \nu), \quad (105.3)$$

حيث المقادير α متميِّزة. وإذا رمزنا بِـ E_j و N_j للمصفوفتين الرئيستين متساوية القوى ومعدومة القوى الموافقتين لِـ A والمقابلتين للجذر α_j ، فلدينا

$$A = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i E_i + N_i),$$

حيث تحقِّق الـ E_i و N_i شروط الفقرة ٧٦ . ولدينا عندئذ كما في (78.2)

$$\pi_m(A) = \sum_{i=1}^{s} E_i \pi_m(\alpha_i I + N_i). \qquad (105.4)$$

ويمكن نشر الطرف الأيمن من هذه المعادلة وفقاً لدستور تايلور كما في (78.3) ، وهكذا نجد

$$\pi_m(A) = \sum_{i=1}^{s} \left[\pi_m(\alpha_i)E_i + \pi_m'(\alpha_i)N_i + \frac{\pi_m''(\alpha_i)}{2!} N_i^2 + \cdots + \frac{\pi_m^{(\nu_i - 1)}(\alpha_i)}{(\nu_i - 1)!} N_i^{\nu_i - 1} \right], \qquad (105.5)$$

حيث ينتهي النشر باعتبار أن N_j معدومة القوى ودليلها ν_j . وبما أن المصفوفات E والمصفوفات N مستقلة خطِّيًّا فمن الواضح أن المتسلسلة

$$\pi(A) = \lim_{m \to \infty} \pi_m(A)$$

تتقارب إذا وفقط إذا كانت كل من المتسلسلات:

$$\pi(\alpha_j), \pi'(\alpha_j), \ldots, \pi^{(\nu_j - 1)}(\alpha_j), \qquad (105.6)$$

متقاربة من أجل كل جذر α_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$.

لنعتبر الحالة الخاصة حيث

$$\pi_m(\lambda) = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^m}{m!}.$$

ومن الـواضح أن $\lim_{m \to \infty} \pi_m(\lambda) = e^{\lambda}$ ، بحيث إن كلًّا من الدوال في (105.6) ليس أكثر من e^{α_j} . وبما أن هذه المتسلسلة الأخيرة تتقارب من أجل كل القيم المنتهية لِـ α_j ، فمن الواضح أن المتسلسلة المصفوفاتية

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^m}{m!} + \cdots$$

تتقارب من أجل كل مصفوفة مربعة A . وفي الحقيقة، يمكننا كتابة

$$e^A = \sum e^{\alpha_i}\left[E_i + N_i + \frac{N_i^2}{2!} + \cdots + \frac{N_i^{\nu_i - 1}}{(\nu_i - 1)!}\right]. \qquad (105.7)$$

١٠٦ ـ حل مجموعة معيَّنة من المعادلات

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عناصرها a_{ij} ثابتة، ليكن t_0 عددًا حقيقيًّا ثابتًا و t متغيرًا حقيقيًّا. فلدينا باستخدام العلاقة (103.2):

$$\frac{d}{dt}(t - t_0)^m A = m(t - t_0)^{m-1} A.$$

ومن العلاقة

$$e^{(t-t_0)A} = I + (t - t_0)A + \frac{(t - t_0)^2}{2!} A^2 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^m A^m}{m!}, \quad (106.1)$$

نحصل بالمفاضلة على:

$$\frac{d}{dt}(e^{(t-t_0)A}) = A + (t - t_0)A^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(t - t_0)^{m-1} A^m}{(m - 1)!};$$

أي أن

$$\frac{d}{dt}(e^{(t-t_0)A}) = Ae^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)A} A. \qquad (106.2)$$

لنعد إلى مجموعة المعادلات التفاضلية الخطِّية المتجانسة

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad (106.3)$$

التي نحصل عليها من (104.3) بوضع $F(t) = 0$. إذا كان X_0 متّجه عمود كيفي عناصره ثابتة وأخذنا

$$X(t) = \left[e^{(t-t_0)A}\right] X_0 \qquad (106.4)$$

فنستنتج من (106.2) أن

$$\frac{d}{dt} X(t) = A[e^{(t-t_0)A}]X_0 = AX(t).$$

أي أنّ المتّجه $X(t)$ المعرّف في (106.4) هو حلّ للمعادلة التفاضلية (106.3).

وبالإشارة إلى العلاقة (106.1) يتضح أن الحل $X(t)$ في (106.4) يتصف بالخاصة

$$X(t_0) = X_0$$

نظريـة[*] (١٠٦ ـ ١)

إذا كان X_0 أي متّجــه عمـود ثابت، فإن المتّجـه $X(t) = \left[e^{(t-t_0)A}\right] X_0$ هو حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dX}{dt} = AX$ ، وهو يتصف بالخاصة $X(t_0) = X_0$.

تماريـــن

حل المجموعة التالية من المعادلات التفاضلية

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

حيث A هي المصفوفة:

١) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ٢) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

٣) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ٤) $\begin{bmatrix} -5 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(*) انظر: Michal, A. D., *Matrix and Tensor Calculus*, (NewYork: John Wiley & Sons, 1947), pp. 20-21.

٥) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

٦) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

٧) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

٨) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

٩) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

١٠) لنرمز بـ A للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ولتكن e^A معرّفة كما في (105.7) . احسب e^A مباشرة وبيّن أن

$$e^A = \begin{bmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{bmatrix}.$$

١١) لنرمز بـ A للمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix}$ ولنعرّف e^A كما في (105.7). احسب e^A مباشرة وبيّن أن

$$e^A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}.$$



المراجع

REFERENCES

Albert, A. A., *Modern Higher Algebra*. Cambridge, 1938.

Birkhoff, G., and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*. New York, 1946.

Bocher, M., *Introduction to Higher Algebra*. New York, 1936.

Eaves, J. C., "*On Quasi-k, l-Commutative Matrices*." Unpublished Ph.D. dissertation, University of North Carolina, 1949.

Ferrar, W. L., *Algebra—A Textbook of Determinants Matrices and Algebraic Forms*. Oxford, 1941.

Frazer, R. A., W. J. Duncan, and A. R. Collar, *Elementary Matrices*. Cambridge, 1938.

Kowalewski, G., "Naturliche Normalformen linearer Transformationen," *Ber. Verh. sachs. Akad.*, Leipzig, Vol. 68 (1916), 325–35.

MacDuffee, C. C., *An Introduction to Abstract Algebra*. New York, 1940.

———, *The Theory of Matrices*. Berlin, 1933.

———, *Vectors and Matrices*. Carus Monographs, 1943.

Michal, A. D., *Matrix and Tensor Calculus*. New York, 1947.

Muth, P., *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*. Leipzig, 1899.

Perlis, S., *Theory of Matrices*. Cambridge, Mass., 1952.

Schreier, O., and E. Sperner, *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*. New York, 1951.

Stoll, R. L., *Linear Algebra and Matrix Theory*. New York, 1952.

Turnbull, H. W., and A. C. Aitken, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*. London, 1929.

Wedderburn, J. H. M., *Lectures on Matrices*. New York: American Mathematical Society *Colloquium Publications*, Vol. 17, (1934).



ثبت المصطلحات

أولاً : عربي - إنجليزي

أ

إبدالي	Commutative
أثـر	Trace
إحداثيات	Coordinates
ارتداد	Inversion
أساس فضاء متّجهات خطّي	Basis of linear vector space
أساسي - جوهري	Fundamental
استقلال خطّي	Linear independence

ب

بـاقٍ	Remainder
أيسر	Left remainder
أيمن	Right remainder
بسيط	Simple
بُعـد	Dimension
بلكر	Plücker, J. (1801 - 1868)

ت

تبديلة	Permutation
تجزئـة	Partition
تحت القطري	Sub-diagonal
تحويل	Transformation
إسقاطي	Projective transformation
أولي	Elementary transformation
تربيعي	Quadratic
ترديد (قياس)	Modulo
تركيب (متوافقة)	Combination
تسامت	Collineation

تكامل	Integration
توافقي	Harmonic
توقيع	Signature

ج

جاكوبي	Jacobi, C. (1804 - 1851)
جاندلفنجر	Gundelfinger, S. (1846 - 1910)
جُداء	Product
جذر	Root
جزئي	Partial
جوردان	Jordan, C. (1838 - 1922)

ح

حتمي	Dteterministic
حدود مربَّعة	Squared terms
حزمة	Pencil
حقل	Field
موسَّع	Extended field
حقيقي	Real
حل تافه	Trivial solution
حلقة	Ring

خ

خارج (حاصل)	Quotient
خاصة مميَّزة	Characteristic
خطِّي	Linear

د

داخلي	Inner
دالَّة	Function
أوليَّة	Elementary function
متناوبة	Alternating function
دليل	Index
دوري	Periodic
دوَّار	Circulant

ر

رئيس	Principal
رتبة	Rank

ز

زوج	Pair
إيجابي	Positive pair
سلبي	Negative pair

س

سلسلة	Chain
سلَّمي	Scalar
سميث	Smith, H. (1826 - 1883)
سيجر	Segre, C. (1863 - 1924)
سيلفستر	Sylvester, J. (1814 - 1897)

ش

شــاذ	Singular
شباه	Homology

ص

صحيح	Integer
صفريـة	Nullity
صيغـة	Form
تربيعية	Quadratic form
ثنائية الخطِّية	Bilinear form
قانونية قياسيّة	Rational canonical form (r. c. f.)
محدّدة	Definite form

ض

ضرب	Multiplication

ع

عامل	Factor
متمّم	Cofactor
عدم استقلال	Dependence
عطفـي	Conjunctive
علاقة انعكاس	Reflexive relation
تكافؤ	Equivalence relation
متعدِّية	Transitive relation

غ

غير شاذ	Non-singular
غير متردٍّ	Non-derogatory
غير محدّد	Indefinite
غير نسبي (غير قياسي)	Irrational

ف

فاندرموند	Vandermonde, A. (1735 - 1796)
فـترة	Interval
فراغية	Vacuity
فضــاء	Space
الحل	Solution space
متّجه	Vector space
فوق القطري	Super-diagonal

ق

قاسم أيسر	Left divisor
أيمن	Right divisor
قالـب	Block
قانون الدمج	Associative law
قانوني	Canonical
قَرْنـي	Secular
قَرِينَة	Adjoint
قصور ذاتي (عطالة)	Inertia
قطـري	Diagonal
قواسم أوّلية	Elementary divisors
قيمة صغرى	Minimum

قيمة عظمى	Maximum

ك

كاترنيون	Quaternion
كارتيزي	Cartesian
كامـن	Latent
كثيرة حدود	Polynomial
ابتدائيَّة	Elementary polynomial
مصفوفيَّة	Matric polynomial
واحديَّة	Monic polynomial
كرامـير	Cramer, C. (1704 - 1752)
كرونكر	Kronecker, L. (1823 - 1891)
كوجريدينت	Cogredient
كوشـي	Cauchy, A. L. (1798 - 1857)
كونتراجريدنت	Contragredient
كَيـلي	Cayley, A. (1821 - 1895)

ل

لابلاس	Laplace, P. (1749 - 1827)
لاغرانج	Lagrange, J. (1736 - 1813)
لا متغيّر	Invariant
لا نهاية	Infinity

م

مائل التناظر	Skew-symmetric
متجانس	Homogeneous
متّجـه	Vector
عمود	Column vector
مـتردٍّ	Derogatory
متساوي القوى	Idempotent
متسلسلة قوى مصفوفيّة	Matric power series
متشابه	Similar
متعامد	Orthogonal
متغيّر	Variable
متكافئان حقيقيًّا	Real equivalent
متممة	Complement
متمم جبري	Algebraic complement
متميز - مختلف	Distinct
متناظر	Symmetric
مجموع	Sum
مجموعة	Set
مجموع مباشر	Direct sum
محايد أيسر	Left unity
أيمن	Right unity
محدَّد	Determinant
سالب	Negative definite
محصلة	Resultant
مختزل	Reduced
مرافق	Conjugate
مركّب	Complex
مستقيم في اللانهاية	Line at infinity
مستوية (في المستوى نفسه)	Coplaner
مصغّـر	Minor
رئيس	Principal minor

مصفوفات شبه إبدالية
Quasi-commutative matrices

مصفوفة	Matrix
لامبدا	Lambda matrix
مثلثة	Triangular matrix
محايدة	Identity matrix
موسّعة	Augmented matrix
هرميشية	Hermitian matrix
واحدية	Unitary matrix
الوحدة (المحايدة)	Unit matrix
مضاعف أيسر	Left multiple
أيمن	Right multiple
مطابق ـ ملائم	Congruent
معادلة صغرى	Minimum equation
معامل	Coefficient
معدوم القوى	Nil potent
معكوس	Inverse
مفكوك (نشر)	Expansion
مفني متّجه	Annihilator of a vector
مقدمة	Preface
مِقياس	Modulus
مميِّز	Discriminant
منقول	Transpose
موجبة نصف محدَّدة	Positive semi-definite

ن

ناظمي	Normal
نسبي (قياسي)	Rational
نصف محدَّد	Semi-definite
نظام	System
نظامي	Regular

هـ

هاملتون	Hamilton, W. (1805 - 1865)
هندسة إسقاطية	Projective geometry

و

وايـر	Weyr, E. (1852 - 1903)
واير ستراس	Weierstrass, K. (1815 - 1897)
وحيد	Unique

ي

يتلاشى	Degenerate
يولد	Span



ثانيًا: إنجليزي - عربي

A

Adjoint قرينة

Algebraic complement متمم جبري

Alternating function دالّة متناوبة

Annihilator of a vector مفني متّجه

Associative law قانون الدمج

Augmented matrix مصفوفة موسّعة

B

Basis of linear vector space أساس فضاء متّجهات خطّي

Bilinear form صيغة ثنائية الخطية

Block قالب

C

Canonical قانوني

Cartesien كاريتيزي

Cauchy, A. L. (1789 - 1857) كوشي

Cayley, A. (1821 - 1895) كَيلي

Chain سلسلة

Characteristic خاصة مميِّزة

Circulant دوّار

Coefficient معامل

Cofactor عامل متمم

Cogredient كوجريدْيَنْت

Collineation تسامت

Column vector متّجه عمود

Combination تركيب (متوافقة)

Commutative إبدالي

Complement متممة

Complex مركب

Congruent مطابق

Conjugate مرافق

Conjunctive عطفي

Contragredient كنتراجريدْيَنْت

Coordinates إحداثيات

Coplaner مستوية (في المستوى نفسه)

Cramer, G. (1704 - 1752) كرامِر

D

Definite form	صيغة محدَّدة
Degenerate	يتلاشى
Dependence	عدم استقلال
Derogatory	مـتردٍّ
Determinant	محـدِّد
Deterministic	حتمي
Diagonal	قطري
Dimension	بُعْـد
Direct sum	مجموع مباشر
Discriminant	مميِّز
Distinct	مختلف

E

Elementary divisors	قواسم أوّلية
function	دالّة أوليَّة
polynomial	كثيرة حدود ابتدائية
transformation	تحويل أولي
Equivalence relation	علاقة تكافؤ
Expansion	مفكوك (نشر)
Extended field	حقل موسَّع

F

Factor	عامل
Field	حقل
Form	صيغـة
Function	دالَّة
Fundamental	أساسي ـ جوهري

G

Gundelfinger, S. (1846 - 1910)	جاند لفنجر

H

Hamilton, W. (1805 - 1865)	هاملتون
Harmonic	توافقي
Hermitian matrix	مصفوفة هرميشية
Homogeneous	متجانس
Homology	شباه

I

Idempotent	متساوي القوى
Identity matrix	مصفوفة محايدة
Indefinite	غير محدَّد
Index	دليل
Inertia	قصور ذاتي (عطالة)
Infinity	لا نهاية
Inner	داخلي
Integer	صحيح
Integration	تكامل
Interval	فترة
Invariant	لا متغيّر
Inverse	معكوس
Inversion	ارتداد
Irrational	غير نسبي (غير قياسي)

J

Jacobi, C. (1804 - 1851)	جاكوبي
Jordan, C. (1838 - 1922)	جوردان

K

Kronecker, L. (1823 - 1891)	كرونكر

L

Lagrange, J. (1736 - 1813)	لاغرانج
Lambda matrix	مصفوفة لامبدا
Laplace, P. (1749 - 1827)	لابلاس
Latent	كامن
Left divisor	قاسم أيسر
multiple	مضاعف أيسر
remainder	باقٍ أيسر
unity	محايد أيسر
Linear	خطِّي
independance	استقلال خطِّي
Line at infinity	مستقيم في اللانهاية

M

Matric polynomial	كثيرة حدود مصفوفيَّة
power series	متسلسلات قوى مصفوفيّة
Matrix	مصفوفة
Maximum	قيمة عظمى
Minimum	قيمة صغرى
Minimum equation	معادلة صغرى
Minor	مُصغّر
Modulo	ترديد (قياس)
Modulus	مقياس
Monic polynomial	كثيرة حدود واحدية
Multiplication	ضرب

N

Negative definite	محدَّد سالب
pair	زوج سلبي
Nilpotent	معدوم القوى
Non-derogatory	غير مـتردٍّ
-singular	غير شاذ
Normal	ناظمي
Nullity	صفرية

O

Orthogonal	متعامد

P

Pair	زوج
Partial	جزئي
Partition	تجزئة
Pencil	حزمة
Periodic	دوري
Permutation	تبديلة
Plücker, J. (1801 - 1868)	بلكر
Polynomial	كثيرة حدود

Positive pair زوج إيجابي
semi-definite موجبة نصف ـ محدَّدة
Preface مقدمة
Principal رئيس
minor مصغر رئيس
Product جُداء
Projective geometry هندسة إسقاطية
transformation تحويل إسقاطي

Q

Quadratic تربيعي
form صيغة تربيعيَّة
Quasi-commutative matrices
مصفوفات شبه إبدالية
Quaternion كاترنيون
Quotient خارج (حاصل)

R

Rank رتبـة
Rational نسبي (قياسي)
canonical form (r. c. f.)
صيغة قانونية قياسية
Real حقيقي
equivalence متكافئان حقيقيًا
Reduced مختزل
Reflexive relation علاقة انعكاس
Regular نظامي
Remainder بـاقٍ
Resultant محصلة
Right divisor قاسم أيمن
multiple مضاعف أيمن
remainder باقٍ أيمن
unity محايد أيمن
Ring حلقة
Root جذر

S

Scalar سُلَّمي
Secular قَرْني
Segre, C. (1863 - 1924) سيجر
Semi-definite نصف محدَّد
Set مجموعة
Signature توقيع
Similar متشابه
Simple بسيط
Singular شاذ
Skew-symmetric مائل التناظر
Smith, H. (1826 - 1883) سميث
Solution space فضاء الحل
Space فضاء
Span يولِّد
Squared terms حدود مربّعة
Sub-diagonal تحت القطري
Sum مجموع
Super-diagonal فوق القطري
Sylvester, J. (1814-1897) سيلفستر
Symmetric متناظر
System نظام

T

Trace	أثـر
Transformation	تحويل
Transitive relation	علاقة متعدّية
Transpose	منقول (مدوَّر)
Triangular matrix	مصفوفة مثلَّثة
Trivial solution	حل تافه



Unique	 وحيـد
Unitary matrix	مصفوفة واحدية
Unit matrix	مصفوفة الوحدة (المحايدة)

V

Vacuity	فراغية
Vandermonde, A. (1735 - 1796)	فاندرموند
Variable	متغيّر
Vector	متّجه
space	فضاء متّجه



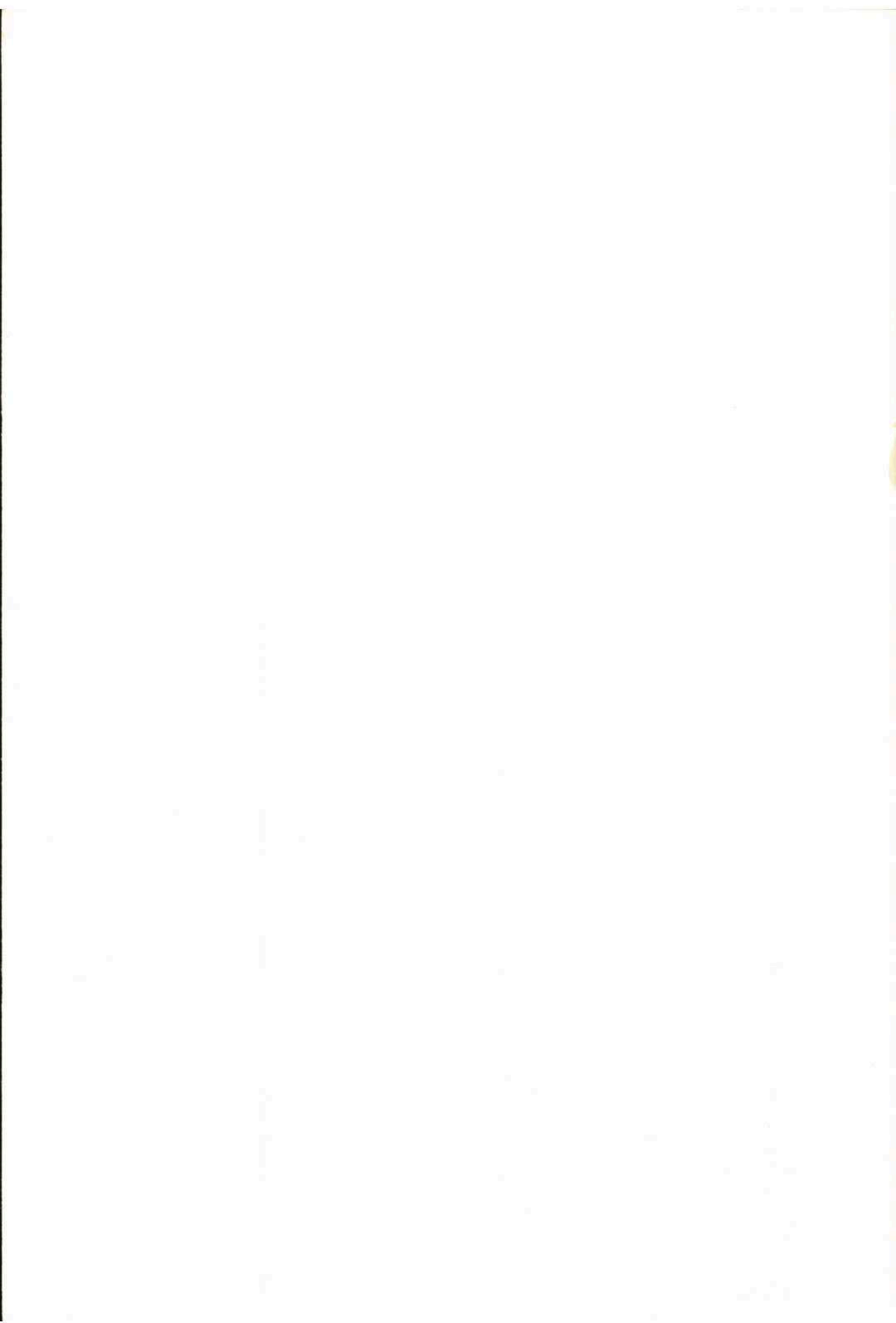
Weierstrass, K. (1815 - 1897)	وايرستراس
Weyr, E. (1852 - 1903)	وايـر



كشـــاف

الموضوعات

ن



ردمك :٢-٤٦٣-٠٥-٩٩٦٠

ISBN: 9960-05-463-2